

SMA-120 INTRODUÇÃO A ANÁLISE FUNCIONAL  
Funcionais Lineares e os  
Teoremas de Hahn-Banach

Alexandre Nolasco de Carvalho  
Universidade de São Paulo  
São Carlos SP, Brazil

19 de Agosto de 2025  
**Segundo Semestre de 2025**

## TEOREMAS DE HAHN-BANACH: FORMAS GEOMÉTRICAS

Seja  $X$  um espaço vetorial normado real.

### Definição

Um hiperplano (afim) é um conjunto da forma

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

onde  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear não identicamente nulo e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Diremos que  $H$  é o hiperplano de equação  $[f = \alpha]$ .

### Proposição

O hiperplano de equação  $[f = \alpha]$  é fechado se e somente se  $f$  é contínua.

Note que, se  $X$  é um espaço vetorial e  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  é um funcional linear não nulo, existe  $x_f \in X$  tal que  $f(x_f) = 1$ . Agora, dado  $x \in X$  podemos escrever, de maneira única,

$$x = z + w, \quad z \in N(f), \quad w \in [x_f].$$

De fato, se  $x = z + w = z' + w'$  com  $z, z' \in N(f)$  e  $w, w' \in [x_f]$ , então  $z - z' = w' - w \in N(f) \cap [x_f]$ , segue que  $z - z' = \alpha x_f$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $f(z - z') = 0$ . Logo, como  $f(x_f) = 1$ ,  $\alpha = 0$ . Portanto,  $w = w'$  e  $z = z'$ . Claramente  $z = x - f(x)x_f$  e  $w = f(x)x_f$ .

Consequentemente

$$X = N(f) \oplus [x_f].$$

Dados  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $\{x_1, \dots, x_n\}$  um conjunto linearmente independente de vetores de  $X$ , existem funcionais lineares  $\{f_1, \dots, f_n\}$  tais que  $f(x_i) = 1$ ,  $1 \leq i \leq n$ , e

$$X = \bigcap_{i=1}^n N(f_i) \oplus [x_1, \dots, x_n].$$

Se  $X$  é um subespaço vetorial normado, dado  $F \stackrel{SEV}{\subset} X$  com  $F$  de dimensão finita, existe  $G \stackrel{SEV}{\subset} X$  fechado e tal que

$$X = G \oplus F.$$

### Definição

Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Diremos que  $C \subset X$  é convexo se  $tx + (1 - t)y \in C$  sempre que  $t \in [0, 1]$  e  $x, y \in C$ .

### Definição

Se  $A, B \subset X$  dizemos que o hiperplano de equação  $[f = \alpha]$  separa  $A$  e  $B$  no sentido fraco se

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{e} \\ f(x) &\geq \alpha \quad \forall x \in B. \end{aligned}$$

Diremos que o hiperplano de equação  $[f = \alpha]$  separa  $A$  e  $B$  no sentido forte se existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \alpha - \epsilon \quad \forall x \in A \quad \text{e} \\ f(x) &\geq \alpha + \epsilon \quad \forall x \in B. \end{aligned}$$

### Lemma (O Funcional de Minkowski de um convexo)

Seja  $X$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$  e  $C \subset X$  um **aberto convexo** com  $0 \in C$ . Para todo  $x \in X$  define

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 ; \alpha^{-1}x \in C\}$$

( $p$  é o funcional de Minkowski de  $C$ ). Então,  $p$  é um funcional sub-linear e existe  $M$  tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \quad \forall x \in X, \\ C = \{x \in X : p(x) < 1\}. \end{aligned} \tag{1}$$

## Lemma

*Seja  $C \subset X$  um aberto convexo não vazio e  $x_0 \in X \setminus C$ . Então existe  $f \in X^*$  tal que  $f(x) < f(x_0)$  para todo  $x \in C$ . Em particular o hiperplano fechado de equação  $[f = f(x_0)]$  separa  $C$  de  $x_0$  no sentido fraco.*

**Prova:** Por translação sempre podemos supor que  $0 \in C$ . Sejam  $p$  o funcional de Minkowski de  $C$  e  $G = \mathbb{R}x_0$  e  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(tx_0) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

É claro que

$$g(x) = g(tx_0) = \begin{cases} t \leq t \cdot p(x_0) = p(tx_0), & t > 0 \\ t \leq 0 \leq p(tx_0), & t \leq 0. \end{cases}$$

Logo, do Teorema de Hahn-Banach real, existe  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f|_G = g$  e

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Em particular  $f(x_0) = 1$  e  $f$  é contínua pois  $p(x) \leq M\|x\|$ . Além disso  $f(x) < 1$  para todo  $x \in C$  e o resultado está provado.  $\square$

## Teorema (Primeira Forma Geométrica do Hahn-Banach)

*Seja  $X$  um espaço vetorial normado real e sejam  $A, B \subset X$  dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Se  $A$  é aberto existe um hiperplano fechado que separa  $A$  e  $B$  no sentido fraco.*

**Prova:** Seja  $C = A - B$ . Então  $C$  é convexo e aberto e  $0 \notin C$  (pois  $A \cap B = \emptyset$ ). Segue do lema acima que existe  $f \in X^*$  tal que

$$f(z) < 0 \quad \forall z \in C$$

e portanto

$$f(a) < f(b) \quad \forall a \in A \text{ e } b \in B.$$

Seja  $\alpha$  tal que  $\sup_{a \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} f(b)$ . Então, o hiperplano de equação  $[f = \alpha]$  separa  $A$  e  $B$  no sentido fraco.  $\square$

## Teorema (Segunda Forma Geométrica do Hahn-Banach)

*Seja  $X$  um espaço vetorial normado real,  $A$  e  $B$  convexos, não vazios e disjuntos em  $X$ . Suponha que  $A$  é fechado e  $B$  é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa  $A$  e  $B$  no sentido forte.*

**Prova:** Seja  $A_\epsilon = A + B_\epsilon(0)$ ,  $B_\epsilon = B + B_\epsilon(0)$ ,  $\epsilon > 0$ , então  $A_\epsilon$  e  $B_\epsilon$  são abertos, convexos e não vazios. Para  $\epsilon > 0$  pequeno  $A_\epsilon$  e  $B_\epsilon$  são disjuntos (como  $A$  é fechado  $d(b, A) > 0 \quad \forall b \in B$  e como  $B$  é compacto  $\inf_{b \in B} d(b, A) = d(B, A) > 0$ ).

Da primeira versão que existe um hiperplano fechado que separa  $A_\epsilon$  e  $B_\epsilon$  no sentido fraco. Logo

$$f(x + \epsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \epsilon z') \quad \forall x \in A, y \in B, z, z' \in B_1(0).$$

Assim, obtemos que

$$f(x) + \epsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \epsilon \|f\| \quad \forall x \in A, y \in B$$

e o resultado segue do fato que  $f \neq 0$ .  $\square$

## Corolário

Seja  $X$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $F \subset X$  um subespaço vetorial próprio de  $X$  ( $\bar{F} \subsetneq X$ ). Então, existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$  tal que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in F$$

**Prova:** Sabemos que se  $X$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$ . Dado  $x_0 \notin \bar{F}$ , existe  $f \in X \rightarrow \mathbb{R}$  linear contínua tal que

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in F.$$

Segue que,  $f(x) = 0, \forall x \in F$ .

Seja  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $g(x) = f(x) - if(ix)$  no caso em que  $X$  é um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Obs.:** É freqüente utilizar o corolário acima para mostrar que  $F$  é denso mostrando que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in F \Rightarrow f = 0.$$