2.ª Prova de SMA 5880 - Sistemas Dinâmicos Não Lineares

Professor: Alexandre Nolasco Carvalho

Nome:______________________________

29.11.2023

Questões	Notas	Questões	Notas
01ª		**03ª**	
02ª		**04ª**	
Total		**Total**	

1ª Questão

(1) Explique as differenças entre as noções de invariância nos contextos autônomo e não-autônomo.
(2) Enuncie e demonstre um resultado que dê condições suficientes para que um processo de evolução tenha um atrator pullback.
(3) Dê condições suficientes (sobre os processos) para que uma família de atratores pullback seja semicontinua superiormente.
(4) Enuncie e demonstre um resultado de semicontinuidade inferior de atratores pullback.
(5) Defina dicotomia exponencial e separação exponencial e comente as relações entre estes conceitos
(6) Enuncie o teorema da variedade inercial e sua variedades estável. Comente como este resultado é usado para provar que dicotomias exponenciais são robustas por perturbação.
(7) Enuncie um resultado sobre a preservação de soluções globais hiperbólicas sob perturbações.
(8) Descreva o processo de obtenção de uma variedade instável local como um gráfico a partir dos resultados sobre variedade inercial.
(9) Como isto é utilizado para mostrar a semicontinuidade inferior de atratores pullback.

2ª Questão Seja X um espaço de Banach e $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo linear. Suponha que exista uma projeção $P \in \mathcal{L}(X)$ e constantes $M \geq 1$ e $\omega > 0$ tais que

a) $\|T(t)(I-P)\| \leq Me^{-\omega t}, t \geqslant 0$.

b) $T(t) : P(X) \to P(X)$ é um isomorfismo e $T(t) = (T(t)P)^{-1} \in \mathcal{L}(P(X)), t < 0$.

c) $\|T(t)P\| \leq Me^{\omega t}, t \leqslant 0$.

Neste caso diremos que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ tem dicotomia exponencial com constante M, expoente ω e projeção P. Se $B \in \mathcal{L}(X)$ e $\{T_1(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é dado por

$$T_1(t) = T(t) + \int_0^t T(t-s)BT_1(s)ds,\ t \geqslant 0.$$

Mostre que:

- Dado $M_1 > M$ e $0 < \omega_1 < \omega$, existe $\epsilon > 0$ e projeção $P_1 \in \mathcal{L}(X)$ tais que $\{T_1(t) : t \geqslant 0\}$ tem dicotomia exponencial com constante M_1, expoente ω_1 e projeção P_1 sempre que $\|B\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon$.

$\boxed{\textbf{3ª Questão}}$ Seja X um espaço de Banach e $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo linear e $f : X \to X$ uma função continuamente diferenciável e globalmente lipschitiziana. Considere o semigrupo não linear $\{T_f(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{C}(X)$ dado por

$$T_f(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(T_f(s)x)ds,\ t \geqslant 0.$$

Suponha que $\{T_f(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{C}(X)$ seja gradiente, tenha um atrator global $\mathcal{A}_f$ e apenas um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{x_1^*, \cdots, x_n^*\}$, todas hiperbólicas, isto é,

$$T_i(t) = T(t) + \int_0^t T(t-s)f'(x_i^*)T_i(s)ds,\ t \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

tem dicotomia exponencial com constante $M_i \geq 1$, expoente $\omega_i > 0$ e projeção P_i.

Para $\epsilon > 0$ seja

$$\mathcal{F}_\epsilon = \{g \in C^1(X) : \sup_{x \in X}\{\|g(x) - f(x)\|_X + \|f'(x) - g'(x)\|_{\mathcal{L}(X)}\} \leqslant \epsilon\}.$$

Suponha que para algum $\epsilon_0 > 0$ e para toda $g \in \mathcal{F}_{\epsilon_0}$ o semigrupo

$$T_g(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(T_g(s)x)ds,\ t \geqslant 0$$

tem um atrator global $\mathcal{A}_g$ e a família $\{T_g(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{C}(X)$ for contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $g = f$ com $\cup_{g \in \mathcal{F}_{\epsilon_0}} \mathcal{A}_g$ limitado.

Mostre que, existe $\epsilon < \epsilon_0$ tal que o semigrupo $\{T_g(t) : t \geqslant 0\}$ dado por

$$T_g(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(T_g(s)x)ds,\ t \geqslant 0$$

é gradiente e que a família $\{\mathcal{A}_g; g \in \mathcal{F}_\epsilon\}$ é semicontínua superiormente e inferiormente em $g = f$.

$\boxed{\textbf{4ª Questão}}$ Seja X um espaço de Banach e $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$. Defina $T_{m,m} = I$ e $T_{n,m} = T_{n-1} \circ \cdots \circ T_m$ para $n > m$. Diremos que um processo de evolução discreto $\{T_{n,m} : n \geqslant m\} \subset \mathcal{L}(X)$ associado à $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta com constante $M \geqslant 1$ e expoente $\omega > 0$ e projeções $\{Q_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ se

i) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $T_n Q_n = Q_{n+1} T_n$,

ii) Para todo $m > n \in \mathbb{Z}$, $T_{m,n} : R(Q_n) \to R(Q_m)$ é um isomorfismo com inversa $T_{n,m} : R(Q_m) \to R(Q_n)$,

iii) Valem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} &\|T_{n,m}(I - Q_m)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{-\omega(n-m)}, \quad n \geqslant m, \\ &\|T_{n,m}Q_m\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant Me^{\omega(n-m)}, \quad n < m. \end{aligned} \tag{1}$$

Mostre que

(1) $\{T_{n,m} : n \geqslant m\} \subset \mathcal{L}(X)$ associado à $\{T_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta se e somente se para cada $f : \mathbb{Z} \to X$ limitada

$$x_{n+1} = T_n x_n + f(n)$$

tem uma única solução limitada.

(2) Seja $B : \mathbb{Z} \to \mathcal{L}(X)$ e $\{S_{n,m} : n \geqslant m\} \subset \mathcal{L}(X)$ dado por

$$S_{n,m}x = T_{n,m}x + \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1} \circ B(k+1) \circ S_{k+1,m}x,\ n > m,\ x \in X.$$

Suponha que $\{T_{n,m} : n \geqslant m\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que, se $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|B_n\|_{\mathcal{L}(X)} < \epsilon$ então, $\{S_{n,m} : n \geqslant m\} \subset \mathcal{L}(X)$ tem dicotomia exponencial discreta.