Dimensão Fractal de Conjuntos Invariantes para Sistemas Dinâmicos

Alexandre N. Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

XXV Semana de Matemática IBILCE/UNESP-SJRP

Roteiro do Minicurso

- Aula 01
  - Introdução
  - Espaços Métricos Compactos
  - Dimensão Topológica e o Teorema de Imersão
- Aula 02
  - Semigrupos e Seus Atratores Globais
  - Equações Diferenciais com Atratores Globais
  - A Dimensão Fractal
  - Estimativas da Dimensão Fractal para Atratores Globais

Introdução

Neste minicurso vamos apresentar uma pequena parte da teoria da dimensão fractal para atratores de semigrupos em espaços de Banach de dimensão infinita.

Esta teoria trata de responder se os atratores dos semigrupos em espaços de Banach de dimensão infinita podem ser vistos como objetos em espaços de dimensão finita sem que haja perda de qualquer informação (sobre a dinâmica) contida no atrator.

Na primeira parte do minicurso apresentamos noções básicas de espaços métricos necessárias para a introdução da noção de dimensão topológica para espaços métricos compactos.

Em seguida apresentamos o teorema de imersão que nos assegura que um espaço métrico compacto de dimensão m é homeomorfo a um subconjunto de $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Na segunda parte do minicurso faremos uma breve apresentação sobre os atratores globais de sistemas dinâmicos autônomos, daremos exemplos de equações diferenciais que dão origem a sistemas dinâmicos com atratores globais e mostraremos que os atratores para semigrupos em espaços de Banach de dimensão infinita têm (em geral) dimensão fractal finita.

Sabendo-se que a dimensão fractal é um limitante superior para a dimensão topológica, obteremos que os objetos dinâmicos contidos nos atratores de semigrupos em espaços de Banach de dimensão infinita são (em geral) **finito dimensionais**.

Os resultados sobre a dimensão fractal de conjuntos negativamente invariantes associados a semigrupos diferenciáveis remontam aos trabalhos de John Mallet-Paret [14] e Mañé [15]. Estes resultados, suas simplificações e generalizações podem ser encontrados em [1, 2].

O principal avanço obtido em [15] relativamente a [14], onde os resultados são mostrados para espaços de Hilbert, é o tratamento em espaços de Banach gerais. Em [15] também pode ser encontrado um resultado de imersão que substitui homeomorfismos gerais por projeções injetivas, no caso em que o conjunto tem dimensão fractal finita n, para a imersão em $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Existem provas alternativas desses resultados que buscam encontrar estimativas ótimas da dimensão fractal. É minha opinião que essas provas alternativas (veja por exemplo [19, 13]) são inspiradas nos trabalhos de John Mallet-Paret e Mañe, são mais difíceis e não fica claro que as estimativas obtidas para a dimensão são efetivamente melhores que aquelas dadas em [1].

Por outro lado, os resultados de [3, 4] adotam uma perspectiva completamente diferente e não requerem diferenciabilidade.

Antes de continuarmos, vamos brevemente introduzir algumas noções sobre espaços métricos compactos e a noção de dimensão topológica para os mesmos.

O estudo dos espaços métricos é fundamental para a formação de um matemático e, em geral, é apresentado numa disciplina de Toplogia, de Introdução à Análise ou de Espaços Métricos.

Espaços Métricos

Seja X um conjunto não vazio. Uma função $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ satisfazendo

- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, para todo $x, y \in X$,
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$.

é chamada uma *métrica* em X. Um *espaço métrico* consiste de um conjunto não vazio X e uma métrica ρ em X. Escreveremos (X, ρ) para indicar o espaço métrico consistindo do conjunto X e da métrica ρ.

Se (X, ρ) é um espaço métrico temos que:

- $B_r(x) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$ é chamado bola aberta de centro em x e raio r.
- Um conjunto $E \subset X$ é dito aberto em (X, ρ) se para cada $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset E$.
- Um conjunto $F \subset X$ é dito fechado em (X, ρ) se F^c (complementar de F) é aberto em (X, ρ).

É fácil provar que

- A união (interseção) qualquer de conjuntos abertos (fechados) em (X,ρ) é um conjunto aberto (fechado) em (X,ρ).
- A interseção (união) finita de conjuntos abertos (fechados) em (X,ρ) é um conjunto aberto (fechado) em (X,ρ).

Definimos então

- O *interior* E^o de um conjunto $E \subset X$ é a união de todos os abertos de (X, ρ) contidos em E. É claro que E é aberto se e somente se $E = E^{\mathrm{o}}$.
- O *fecho* E^- de um conjunto $E \subset X$ é a interseção de todos os fechados de (X, ρ) contendo E. É claro que E é fechado se e somente se $E = E^-$.
- Um conjunto $E \subset X$ é dito *denso* em X se $E^- = X$. Um conjunto $E \subset X$ denso em X se, e somente se, E^c tem interior vazio.
- Uma seqüência $\{x_n\}$ em (X, ρ) converge para $x \in X$ se $\rho(x_n, x) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Uma seqüência $\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}}$ é dita uma *seqüência de Cauchy* se $\rho(x_n, x_m) \stackrel{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Toda seqüência convergente é de Cauchy.

Um conjunto $E \subset X$ é dito *completo* se toda seqüência de Cauchy em E é convergente e seu limite pertence a E.

Tipicamente os espaços métricos que vamos utilizar aqui são espaços de Banach (espaços vetoriais normados que são completos com a métrica induzida pela norma $\rho(x, y) = \|x - y\|$) ou subconjuntos desses.

Exercício (1)

Se $E \subset X$ temos que, $x \in E^-$ se, e somente se, qualquer bola aberta centrada em x intersepta E se, e somente se, existe uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos de E que converge para x.

Exercício (2)

Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo e um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.

Solução do Exercício 1: Se existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^c$ então $x \in E^{co}$ e como E^{coc} é fechado e contém E temos que $x \notin E^-$. Segue que, se $x \in E^-$, então $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$. Se $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, então ou $x \in E$ e podemos tomar $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $x \notin E$ e tomamos $x_n \in B_{1/n}(x) \cap E$, $x_n \neq x$, em ambos os casos $\{x_n\}$ converge para x. Se existe uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos de E que converge para x e $x \notin E^-$ então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^{-c}$ e portanto $x_n \in E^{-c}$ para n suficientemente grande o que é um absurdo. Segue que $x \in E^-$.■

Solução do Exercício 2: Se (X,ρ) é um espaço métrico completo, $E \subset X$ é fechado e $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em E temos que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in X$. Pela Proposição 1 segue que $x \in E$ e E é completo.

Se por outro lado E é um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer (X,ρ) e $x \in E^-$ temos pela Proposição 1 que existe uma seqüência $\{x_n\}$ em E que converge para x. Segue do fato que toda seqüência convergente é de Cauchy que $x \in E$. Isto mostra que E é fechado. ∎

Seja (X,ρ) um espaço métrico. Se $x \in X$ e $E, F \subset X$ definimos a distância $\rho(x,E)$ de x a E, a distância $\rho(E,F)$ de E a F, o diâmetro $\mathrm{diam}(E)$ de E e a semidistância de Hausdorff $\mathrm{dist}_H(E,F)$ entre E e F por

$$\begin{aligned}
\rho(x,E) &:= \inf_{e\in E} \rho(x,e)\\
\rho(E,F) &:= \inf_{e\in E,\, f\in F} \rho(e,f) = \inf_{e\in E} \inf_{f\in F} \rho(e,f)\\
\mathrm{diam}(E) &:= \sup_{e_1,e_2\in E} \rho(e_1,e_2)\\
\mathrm{dist}_H(E,F) &:= \sup_{e\in E} \rho(e,F) = \sup_{e\in E} \inf_{f\in F} \rho(e,f).
\end{aligned}$$

Já vimos que $x \in E^-$ se e somente se $\rho(x,E) = 0$ (Exercício 1). Diremos que $E \subset X$ é limitado se $\mathrm{diam} E < \infty$.

Exercício

Mostre que $\mathrm{dist}_H(E,F) = 0$ *se, e somente se,* $E \subset \overline{F}$.

- Se $E \subset X$ e $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma família de subconjuntos de X tal que $E \subset \cup_{\alpha\in A} V_\alpha$ diremos que $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma **cobertura** de E.
- Um **refinamento** de uma cobertura $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de E é uma cobertura de E $\{W_\beta\}_{\beta\in B}$ tal que, para cada $\beta \in B$ existe $\alpha_\beta \in A$ tal que $W_\beta \subset V_{\alpha_\beta}$.
- Uma **sub-cobertura** de uma cobertura $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de E é uma cobertura $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ de E com $A' \subset A$.

- Se (X, ρ) é um espaço métrico, diremos que $E \subset X$ é totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ.
- É claro que todo conjunto totalmete E limitado é limitado, mas não é verdade, em geral, que todo conjunto limitado é totalmente limitado.
- Também é claro que se E é totalmente limitado então E^- é totalmente limitado.

Todo conjunto compacto é fechado pelo Exercício 2 e limitado, a recíproca em geral é falsa mas é verdadeira em $\mathbb{R}^n$ como mostra o exercício abaixo.

Exercício

Todo subconjunto fechado e limitado de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *é compacto*

Teorema

Se E é um subconjunto de um espaço métrico (X, ρ), as seguintes afirmativas são equivalentes:

a) *E é completo e totalmente limitado*
b) **(A propriedade de Bolzano-Weierstrass)** *Toda seqüência em E tem uma subseqüência que converge para um ponto de E*
c) **(A propriedade de Heine-Borel)** *Se $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura de E por abertos de (X, ρ), existe um conjunto finito $F \subset A$ tal que $\{V_\alpha\}_{\alpha\in F}$ cobre E.*

Prova: Mostraremos que a) e b) são equivalentes, que a) e b) juntos implicam c) e que c) implica b).
a) implica b): Suponha que a) vale e que $\{x_n\}$ é uma seqüência em E. E pode ser coberto por um número finito de bolas de raios $\frac{1}{2}$ e pelo menos uma dessas bolas deve conter x_n para um número infinito de índices: Digamos que $x_n \in B_1$ para $n \in N_1$. $E \cap B_1$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\frac{1}{2^2}$ e portanto uma dessas bolas contém x_n para um número infinito de índices: Digamos que $x_n \in B_2$ para $n \in N_2$.

Indutivamente obtemos uma seqüência de bolas B_j de raio $\frac{1}{2^j}$ e uma seqüência decrescente de subconjuntos infinitos N_j de $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_j$ para $n \in N_j$. Escolha $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$, $\ldots$ tal que $n_1 < n_2 < \ldots$. Então $\{x_{n_j}\}$ é uma seqüência de Cauchy pois $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < \frac{2}{2^j}$ se $k > j$, como E é completo o limite dessa subseqüência pertence a E.

b) implica a): Mostraremos que se qualquer das condições em a) falha então b) falha. Se E não é completo, existe uma seqüência de Cauchy $\{x_n\}$ em E que não tem limite em E. Nenhuma subseqüência de $\{x_n\}$ pode convergir em E pois caso contrário a seqüência seria convergente com o mesmo limite. Por outro lado, se E não é totalmente limitado, seja $\epsilon > 0$ tal que E não pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. Escolha $x_n \in E$ indutivamente da seguinte maneira. Comece com qualquer $x_1 \in E$ e tendo escolhido $x_1, \ldots, x_n$ escolha $x_{n+1} \in E \backslash \cup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$. Então $\rho(x_n, x_m) \geq \epsilon$ para todo m, n e portanto $\{x_n\}$ não tem subseqüência convergente.

a) e b) implicam c): É suficiente mostrar que se b) vale e $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura de E por conjuntos abertos, existe $\epsilon > 0$ tal que toda bola de raio ϵ que intersepta E está contida em algum V_α, pois E pode ser coberto por um número finito de tais bolas de a). Suponha que não; isto é, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma bola B_n de raio $1/2^n$ tal que $B_n \cap E \neq \emptyset$ e B_n não está contida em nenhum V_α. Escolha $x_n \in B_n \cap E$. Passando para uma subseqüência podemos assumir que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in E$. Temos que $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in A$ e como V_α é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$. Mas se n é suficientemente grande tal que $\rho(x_n, x) < \epsilon/3$ e $2^{-n} < \epsilon/3$, então $B_n \subset B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$ contradizendo a hipótese sobre B_n.

c) implica b): Se $\{x_n\}$ é uma seqüência sem subseqüência convergente, para cada $x \in E$ existe uma bola B_x centrada em x que contém x_n no máximo para um número finito de índices n (caso contrário haveria uma subseqüência que converge para x). Então $\{B_x\}_{x \in E}$ é uma cobertura de E por abertos sem subcobertura finita. $\blacksquare$

Em um espaço métrico (X, ρ), um conjunto $E \subset X$ é dito *compacto* se tem as propriedades a)-c) do teorema anterior e é dito *relativamente compacto* se E^- é compacto.

Proposição

Seja (X,ρ) um espaço métrico compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ para todo $x \in X$.

Prova: Seja $m_1 = \inf_{x\in X} f(x)$ e $m_2 = \sup_{x\in X} f(x)$. Sejam $\{x_n^1\}$ e $\{x_n^2\}$ tais que $f(x_n^1) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} m_1$ and $f(x_n^2) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} m_2$. Como (X,ρ) é compacto, existem x_1, x_2 e conjunto infinito $N \subset \mathbb{N}$ tais que $x_n^i \stackrel{N\ni n\to\infty}{\longrightarrow} x_i$, $i = 1, 2$ e assim, $f(x_1) = m_1 \le f(x) \le m_2 = f(x_2)$ para todo $x \in X$. ■

A seguinte versão elementar do Lema de Urysohn será utilizada a seguir.

Lema

Seja (X,d) um espaço métrico, $U \subset X$ um aberto e $K \subset U$ um compacto. Então existe uma função contínua $f \in C(X,[0,1])$ tal que $\chi_K \leq f \leq \chi_U$.

Prova: Basta tomar

$$f(x) = \frac{d(x,U^c)}{d(x,U^c)+d(x,K)}.$$

■

Um conjunto $A \subset X$ é dito de *Primeira Categoria* em X se está contido numa união enumerável de conjuntos fechados com interior vazio, caso contrário ele é dito de *Segunda Categoria* em X. É uma conseqüência imediata desta definição que

Proposição

(X, ρ) é de segunda categoria nele mesmo se e só se, em qualquer representação de X como união enumerável de conjuntos fechados, pelo menos um deles contém uma bola.

Lema (Baire)

Se X um espaço métrico completo,

- *a união enumerável de fechados com interior vazio tem interior vazio,*
- *a interseção enumerável de abertos densos é densa e*
- *X é de segunda categoria nele mesmo.*

Prova: As duas primeiras afirmativas são claramente equivalentes. Seja $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de conjuntos abertos e densos. Mostremos $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é denso; ou seja, que se $\mathcal{O}$ é um aberto qualquer de X, então $\mathcal{O} \cap A \neq \varnothing$. Dado $x_0 \in \mathcal{O}$ seja $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(x_0) \subset \mathcal{O}$ e escolha $x_1 \in B_{r_0}(x_0) \cap A_1$ e $0 < r_1 < \frac{r_0}{2}$ tais que

$$\overline{B}_{r_1}(x_1) \subset B_{r_0}(x_0) \cap A_1.$$

Por indução, tendo escolhido x_n e r_n, escolhemos x_{n+1} e r_{n+1} tais que $0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$ e

$$\overline{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n) \cap A_{n+1}.$$

Segue que a seqüência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e portanto convergente em X. Seja $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como $x_{n+p} \in B_{r_n}(x_n)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ temos que $x \in \overline{B}_{r_n}(x_n) \subset A_n \cap \mathcal{O}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $x \in A \cap \mathcal{O}$ e o resultado segue.

A última parte do lema segue por redução ao absurdo. Suponha que $X = \cup_{i=1}^{\infty} F_i$ com cada F_i fechado e de interior vazio. Então $\varnothing = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} X\backslash F_i$ o que é um absurdo pois, pelo que acabamos de provar, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} X\backslash F_i$ é denso em X. ■

Definição

Seja X um espaço métrico e $\{U_1, \cdots, U_n\}$ uma cobertura aberta de X. Diremos que uma família $\{\phi_i : 1 \leq i \leq n\} \subset C(X, [0,1])$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$ se

1. $\mathrm{supp}(\phi_i) \subset U_i$, $1 \leq i \leq n$,
2. $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$, *para todo* $x \in X$.

Teorema

Seja $\{U_1, \cdots, U_n\}$ *uma cobertura aberta para um espaço métrico compacto* X*. Então existe uma partição da unidade subordinada à cobertura* $\{U_1, \cdots, U_n\}$*.*

Prova: Podemos escolher coberturas abertas $\{V_1, \cdots, V_n\}$ e $\{W_1, \cdots, W_n\}$ de X tais que $W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$, $1 \leq i \leq n$. Basta escolher $V_1 = \mathcal{O}_{\delta_1}(A_1)$ onde

$$A_1 = X \backslash \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{n} U_k \quad \text{e} \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\, d(A_1, X \backslash U_1).$$

Considerar a cobertura $\{V_1, U_2, \cdots, U_n\}$ e prosseguir por indução. Exatamente da mesma forma obtemos $\{W_1, \cdots, W_n\}$.

Seja

$$\psi_i(x) = \frac{d(x, X \backslash V_i)}{d(x, W_i) + d(x, X \backslash V_i)}.$$

Claramente $\psi_i : X \to [0,1]$ é contínua, $\mathrm{supp}(\psi_i) \subset \overline{V}_i \subset U_i$,

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \geq 1, \text{ para todo } x \in X$$

e $\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ com $\phi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\Psi(x)}$, $1 \leq i \leq n$, é uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, \cdots, U_n\}$. ■

Dimensão Topológica

Se K é um espaço topológico, diremos que K tem dimensão finita se existir um natural n tal que, toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de K possui um refinamento $\mathcal{U}'$ com a propriedade que cada ponto de K pertence a no máximo $n+1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$ ($\mathcal{U}'$ tem ordem $n+1$). Neste caso, a dimensão $\dim(K)$ de K é o mínimo n com esta propriedade.

Este conceito tem a propriedade de que a dimensão de qualquer subconjunto compacto com interior não vazio de $\mathbb{R}^n$ é n e, se K é um espaço métrico compacto de dimensão finita, então é homeomorfo a algum subconjunto de $\mathbb{R}^{2\dim(K)+1}$ (Este teorema é devido a G. Nöbeling (1931) (veja [17]) e será provado a seguir com o auxílio do Lema de Baire).

Definição

Diremos que o conjunto $\{z_0, \cdots, z_k\}$ *em* $\mathbb{R}^N$ *é geometricamente independente se* $\sum_{i=0}^{k} a_i z_i = 0$ *e* $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ *implica* $a_i = 0$, $0 \leq i \leq k$. *É claro que* $\{z_0, \cdots, z_k\}$ *é geometricamente independente se, e somente se,* $\{z_1 - z_0, \cdots, z_k - z_0\}$ *é linearmente independente.*

Definição

Um conjunto A *de pontos de* $\mathbb{R}^N$ *está em posição geral em* $\mathbb{R}^N$ *se todo subconjunto de* A *contendo* $N + 1$ *ou menos pontos de* A *é geométricamente independente.*

Teorema

Dado um conjunto finito $\{z_1, \cdots, z_n\}$ *de pontos de* $\mathbb{R}^N$ *e* $\delta > 0$ *existe um conjunto* $\{y_1, \cdots, y_n\}$ *de pontos de* $\mathbb{R}^N$ *que estão em posição geral em* $\mathbb{R}^N$ *e tal que* $\|z_i - y_i\|_\infty < \delta$, $1 \leq i \leq N$.

Prova: A prova é feita por indução. Faça $y_1 = z_1$ e se $\{y_1, \cdots, y_p\}$ estão em posição geral e satisfazem $\|z_i - y_i\|_\infty < \delta$, $1 \leq i \leq p$. Considere y_{p+1} um ponto que não pertence a nenhum dos hiperplanos gerados por N (aqui usamos o Lema de Baire) ou menos pontos de $\{y_1, \cdots, y_p\}$ e que diste menos que δ de z_{p+1}. Assim $\{y_1, \cdots, y_p, y_{p+1}\}$ está em posição geral. ■

Teorema

Todo espaço métrico compacto de dimensão topológica m é homeomorfo a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{2m+1}$

Prova: Seja $N = 2m + 1$ e denote por $\mathbb{R}^N_\infty$ o espaço $\mathbb{R}^N$ com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq N} |x_i|$. Seja $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ o espaço das funções contínuas com a norma $\|f\|_{\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N_\infty)} = \max_{x\in X} \|f(x)\|_\infty$. Segue que $\mathbb{R}^N_\infty$ e $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ são espaços métricos completos.

Dada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ defina

$$\Delta(f) = \sup_{z\in f(X)} \mathrm{diam}(f^{-1}(z)).$$

Note que, o número $\Delta(f)$ é uma medida do quanto f deixa de ser injetiva. De fato, $\Delta(f) = 0$ se, e somente se, f é injetiva.

Dado $\epsilon > 0$, defina $U_\epsilon = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty) : \Delta(f) < \epsilon\}$.
Mostraremos que U_ϵ é aberto e denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ e segue do Lema de Baire que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$$

é denso e portanto não vazio. De fato, existe um conjunto denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ onde todas as funções são injetivas. Do fato que X é compacto, X é homeomorfo a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N_\infty$.

Mostremos que U_ϵ é aberto em $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N_\infty)$. Dado $f\in U_\epsilon$ escolha $b\in(\Delta(f),\epsilon)$. Note que, se $f(x)=f(y)=z$, $\{x,y\}\subset f^{-1}(z)$ e $d(x,y)<b$. Segue que, se $F=\{(x,y)\in X\times X: d(x,y)\geq b\}$, então F é compacto e $X\times X\ni(x,y)\mapsto|f(x)-f(y)|\in\mathbb{R}^+$ é positiva em F.

Seja $\delta=\frac{1}{2}\min\{|f(x)-f(y)\}:(x,y)\in F\}$. Se $g\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N_\infty)$ é tal que $\sup_{x\in X}\|f(x)-g(x)\|_\infty<\delta$, para $(x,y)\in F$ temos que $\|f(x)-f(y)\|_\infty\geq 2\delta$ e $\|g(x)-g(y)\|_\infty>0$. Logo, $g(x)=g(y)$ implica que $d(x,y)<b$ e portanto $\Delta(g)\leq b<\epsilon$. Segue que $g\in U_\epsilon$ e U_ϵ é aberto.

Mostremos que U_ϵ é denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$. Seja $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ e $\epsilon > 0$. Dado $\delta > 0$ mostremos que existe uma função $g \in U_\epsilon$ tal que $\sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \delta$.

Considere uma cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$ de X tal que

- $\mathrm{diam} U_i < \frac{\epsilon}{2}$, $1 \leq i \leq n$,
- $\mathrm{diam}\, f(U_i) < \frac{\delta}{2}$, $1 \leq i \leq n$ e
- $\{U_1, \cdots, U_n\}$ tem ordem $m + 1$.

Seja $\{\phi_i : 1 \leq i \leq n\}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$.

Para cada i, escolha $x_i \in U_i$ e $z_i \in \mathbb{R}^N$ tal que $z_i \in B_{\frac{\delta}{2}}(f(x_i))$ e de forma que $\{z_1, \cdots, z_n\}$ está em posição geral em $\mathbb{R}^N$. Finalmente defina $g : X \to \mathbb{R}^N$ por

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) z_i$$

e mostremos que $\sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \delta$ e que $g \in U_\epsilon$.

Note que

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)(z_i - f(x_i)) + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)).$$

Da escolha de x_i e z_i temos que $\|z_i - f(x_i)\|_\infty < \frac{\delta}{2}$. Como $\phi_i(x) \neq 0$ implica $x \in U_i$, como $\mathrm{diam}(f(U_i)) < \frac{\delta}{2}$; isto é, $\|f(x_i) - f(x)\|_\infty < \frac{\delta}{2}$ sempre que $x \in U_i$ e como $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$ para todo $x \in X$ temos que $\|g(x) - f(x)\| < \delta$ para todo $x \in X$ e $\sup_{x\in X} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \delta$.

Para ver que $g \in U_\epsilon$ mostraremos que, $g(x) = g(y)$ implica que $x, y \in U_i$, para algum $1 \leq i \leq n$. Assim, necessariamente, $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ e consequentemente $\Delta(g) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Suponha que $g(x) = g(y)$. Então $\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)]z_i = 0$. Do fato que a cobertura U_i tem ordem no máximo $m+1$, no máximo $m+1$ dos $\phi(x)$ (e dos $\phi_i(y)$) são não nulos e assim a soma $\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)]z_i = 0$ tem no máximo $2m+2$ parcelas não nulas e que $\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 0$.

Como os z_i estão em posição geral, qualquer subconjunto de $N+1$ ou menos elementos são geométricamente independentes. Como $N+1 = 2m+2$ devemos ter que $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ para todo $1 \leq i \leq N$ e $x, y \in U_j$ para algum $1 \leq j \leq N$, provando que $\Delta(g) < \epsilon$. ∎

Semigrupos e seus atratores

Considere a equação diferential

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + Au = f(u), \;\; t > 0 \\ &u(0) = u_0 \in X \end{aligned} \tag{1}$$

onde X é um espaço de Banach e A é um operador linear (possivelmente ilimitado) and f é o termo forçante não linear "dominado por A".

A equação acima pode ser uma EDO, um problema de reação e difusão, uma equação de ondas, a equação de Navier-Stokes, uma equação diferencial funcional ou qualquer outro processo evolutivo modelado por equações diferenciais.

Suponha que, para cada $u_0 \in X$ existe uma função contínua $u(\cdot, u_0) : [0, \infty) \to X$ que é a única solução **fraca** de (1). Suponha que

$$\mathbb{R}^+ \times X \ni (t, u_0) \mapsto u(t, u_0) \in X$$

seja contínua. Se $\mathcal{C}(X)$ é o espaço das funções contínuas de X nele mesmo, $t \in \mathbb{R}^+$, defina $T(t) \in \mathcal{C}(X)$ por

$$T(t)u_0 = u(t, u_0).$$

O operator $T(t)$ **evolui** o **espaço de fase** X do instante 0 para o instante t.

É claro que

1. $T(0) = I$,
2. $T(t)T(s) = T(t+s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}^+$ e
3. $\mathbb{R}^+ \times X \ni (t, u_0) \mapsto T(t)u_0 \in X$ é contínua.

Uma fanília de operators $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{C}(X)$ com as propriedades acima é chamada **semigrupo** ou **sistema dinâmico**.

Nosso objetivo é estudar o comportamento assintótico de tais semigrupos (ou sistemas dinâmicos).

Agora vamos definir o objeto dinâmico que (em várias ocasiões) contém todos os estados assintóticos de um semigrupo. Para este fim, as noções de **invariância** e de **atração** para semigrupos desempenharão um papel fundamental.

Invariância

Um subconjunto A de X é **invariante** *sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se $T(t)A = A$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.*

Atração

Dados $B_0, B \subset X$, diremos sue B_0 **atrai** *B sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ se*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(T(t)B, B_0) = \lim_{t\to\infty} \sup_{b\in B} d(T(t)b, B_0) = 0.$$

Agora estamos prontos para definir atratores globais

Definição (Atrator Global)

Diremos que $\mathscr{A}$ *é um* **atrator global** *para o semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *se é compacto, invariante e atrai cada subconjunto limitado de* X*.*

O atrator global $\mathscr{A}$, quando existe, é dado por

$$\mathscr{A} = \{x \in X : \text{ existe uma solução global limitada } \xi : \mathbb{R} \to X \text{ por } x\}.$$

Assim, para entender o comportamento assintótico do semigrupo, devemos estudar o seu atrator global.

EDOs

Considere o problema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u), \ \ t > 0 \\ u(0) &= u_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2}$$

com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável e tal que

$$f(u) \cdot u < 0$$

se $\|u\| \geq M$, para algum $M > 0$. Então o semigrupo associado a (2) em $X = \mathbb{R}^n$ tem um atrator global.

EDPs Parabólicas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, um domínio suave. Considere o problem parabólico

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + u = f(u), \text{ em } \Omega, \ t > 0 \\ &u = 0, \text{ em } \quad \partial\Omega, \ t > 0 \\ &u(0) = u_0 \in L^q(\Omega), \ q \in (1, \infty) \end{aligned} \tag{3}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1} + 1),$$

com $\rho = 1 + \frac{2q}{N}$ e, para algum $M > 0$, $f(u)u < 0$, se $|u| \geq M$. O semigrupo associado a (3) in $L^q(\Omega)$ tem um atrator global.

Equações de Ondas Amortecidas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio suave e $\alpha \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} & u_{tt} + \eta(-\Delta)^\alpha u_t - \Delta u = f(u), \ t > 0, \ x \in \Omega \\ & u(x,t) = 0, \ t > 0, \ x \in \partial\Omega \\ & u(x,0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \ u_t(x,0) = v_0 \in L^2(\Omega) \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\eta > 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|(|u|^{\rho_\alpha - 1} + |v|^{\rho_\alpha - 1} + 1),$$

with $\rho_\alpha < \frac{N+2\alpha}{N-2}$ e $f(u)u < 0$ for $|u| \geq M$ para algum $M > 0$. O semigrupo associado a (4) tem um atrator global.

Equações de Navier-Stokes

Para um domínio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} & u_t - \nu P\Delta u + P(u\cdot\nabla)u = Pf(x), \ \ t>0, \ \ x\in\Omega \\ & u(x,t) = 0, \ \ t>0, \ \ x\in\partial\Omega \\ & u(x,0) = u_0 \in L^2_\sigma(\Omega) \end{aligned} \tag{5}$$

com $f \in H^{-s}(\Omega,\mathbb{R}^2)$, $s<2$. O semigrupo associado a (5) em L^2_σ tem um atrator global.

Dimensão Fractal

Agora vamos apresentar a definição de dimensão fractal. Seja K um espaço métrico compacto. Defina $N(r, K)$ como o número mínimo de bolas de raio r necessário para cobrir K. A *dimensão fractal* $c(K)$ de K é definida por:

$$c(K) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(r, K)}{\log(1/r)}.$$

Exercício

Mostre que, $c(K)$ é o menor número para o qual, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$N(r, K) \leqslant \left(\frac{1}{r}\right)^{c(K)+\epsilon}, \quad 0 < r < \delta.$$

Exercício

Encontre exemplos de seqüências que convergem para zero e têm dimensão fractal positiva e dimensão topológica igual a zero. Existem conjuntos com dimensão fractal infinita e com dimensão topológica finita (veja [15]).

Exercício

Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico X. Mostre que, se $\alpha > 0$ e $\eta \in (0,1)$, então

$$c(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(\alpha\eta^n, K)}{-\log(\alpha\eta^n)}.$$

Mais geralmente, se $\{a_n\}$ é uma seqüência decrescente em $(0,\infty)$ com $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\log \frac{a_n}{a_{n+1}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, então $c(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N(a_n,K)}{-\log(a_n)}$.

Lema

Seja X um espaço vetorial normado e K_1, K_2 subconjuntos compactos de X. Então $c(K_1 + K_2) \leqslant c(K_1) + c(K_2)$.

Prova: Note que, se $N_i = N(r, K_i)$ existem $x_1^i, \cdots, x_N^i$ em K tais que $K_i \subset \bigcup_{j=1}^{N_i} B_r(x_j^i)$ e assim $K_1 + K_2 \subset \bigcup_{i=1}^{N_2} \bigcup_{j=1}^{N_1} \Big(B_r(x_j^1) + B_r(x_i^2) \Big)$.
Como $B_r(x_j^1) + B_r(x_i^2) = B_{2r}(x_j^1 + x_i^2)$ temos que $N(2r, K_1 + K_2) \leqslant N(r, K_1) N(r, K_2)$ e assim

$$
\begin{aligned}
c(K_1 + K_2) &= \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(2r, K_1 + K_2)}{\log(1/2r)} \\
&\leqslant \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(r, K_1) N(r, K_2)}{\log(1/2r)} \\
&\leqslant \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(r, K_1)}{\log(1/r)} + \limsup_{r \to 0} \frac{\log N(r, K_2)}{\log(1/r)} \\
&= c(K_1) + c(K_2). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Estimativas da dimensão fractal

Nesta seção mostraremos (usando a regularização de semigrupos) que, em geral, o atrator global de um semigrupo tem dimensão fractal finita. Aproveitaremos para construir o que se conhece na literatura como *atratores exponenciais* (veja [6] para o caso de espaços de Hilbert e [5] para o caso de espaços de Banach).

O foco dos resultados desta seção é a demonstração de que o atrator global tem dimensão fractal finita e, consequentemente, dimensão topológica finita. Não há qualquer preocupação com a obtenção de uma melhor quota para a dimensão. As técnicas utilizadas aqui não exploram as propriedades espectrais da linearização do operador (squeezing). Em lugar disso, as estimativas obtidas para a dimensão dependem de propriedades de regularização do operador e de propriedades de imersões compactas entre espaços de Banach (números de entropia, veja [7]).

A construção dos atratores exponenciais dada a seguir basea-se na construção dada em [8] que é bastante mais geral que aquela dada nos trabalhos iniciais de [6, 5] e também muito mais simples. Há uma enorme literatura voltada à aplicação dos resultados abstratos sobre atratores exponenciais o leitor pode tomar como referência inicial os exemplos apresentados em [8].

Faremos apenas a construção dos atratores exponenciais para o caso discreto, o caso contínuo é deixado para o leitor (veja os casos contínuo e não-autônomo em [3]).

Definição

Seja $\{S^n : n \in \mathbb{N}^+\}$ *um semigrupo num espaço métrico* X*. Diremos que* $\mathcal{M}$ *é um atrator exponencial para* $\{S^n : n \in \mathbb{N}^+\}$ *se for compacto, positivamente invariante* $(S^n(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M},\ n \in \mathbb{N}^+)$, $c(\mathcal{M}) < \infty$ *e existir uma constante* $\gamma > 0$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} e^{\gamma n}\mathrm{dist}_H(S^n(B), \mathcal{M}) = 0$$

para cada $B \subset X$ *limitado.*

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach e suponha que $(X, \|\cdot\|_X)$ esteja compactamente imerso em $(Y, \|\cdot\|_Y)$; isto é, que $X \subset Y$ e que os limitados de $(X, \|\cdot\|_X)$ sejam relativamente compactos em $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Seja $S : X \to X$ uma função contínua tal que

- $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado dissipativo; isto é, existe um conjunto limitado $B_0 \subset X$ tal que, para todo $B \subset X$ limitado existe $n_B \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(B) \subset B_0$ para todo $n \geqslant n_B$.
- Existe uma constante $K > 0$ tal que $\|Sx - Sy\|_X \leqslant K\|x - y\|_Y$, para todo $x, y \in B_0$.

Teorema

Nas condições acima, para todo $\nu \in (0,1)$, $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator exponencial $\mathcal{M}_\nu$ e se $N(r,A)$ denota o número mínimo de bolas de raio r em $(Y, \|\cdot\|_Y)$ necessárias para cobrir $A \subset Y$, então $\mathcal{M}_\nu$ pode ser escolhido de modo que

$$c(\mathcal{M}_\nu) \leqslant \frac{\log(N(\frac{\nu}{2K}, B_1^X(0)))}{\log(\frac{1}{\nu})}.$$

O semigrupo $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$ com $c(\mathcal{A}) \leqslant c(\mathcal{M}_\nu)$.

Prova: Vamos assumir (tomando iteradas de S, se necessário) que $n_{B_0} = 1$. Seja $\nu \in (0,1)$, $N_0 = N(\frac{\nu}{K}, B_0)$ e $V_0 = \{x_1, \cdots, x_{N_0}\} \subset B_0$ tais que

$$B_0 \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} B^Y_{\frac{\nu}{K}}(x_i).$$

Assim,

$$S(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} S(B^Y_{\frac{\nu}{K}}(x_i) \cap B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} B^X_{\nu}(S(x_i)) \cap S(B_0) \qquad (6)$$

Seja $V_1 = S(V_0)$ e $N_\nu = N(\frac{\nu}{2K}, B_1^X(0))$. Logo, existe $V_2 = \{x_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant N_0,\ 1 \leqslant j \leqslant N_\nu\} \subset S(B_0)$ tal que

$$S(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} B_\nu^X(S(x_i)) \cap S(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^Y_{\frac{\nu^2}{K}}(x_{ij}) \cap S(B_0).$$

Como antes, existe $V_3 = \{x_{ijk} : 1 \leqslant i \leqslant N_0,\ 1 \leqslant j, k \leqslant N_\nu\} \subset S^2(B_0)$

$$S^2(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} S(B^Y_{\frac{\nu^2}{K}}(x_{ij}) \cap B_0) \cap S^2(B_0)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} B^X_{\nu^2}(S(x_{ij})) \cap S^2(B_0) = \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} \bigcup_{k=1}^{N_\nu} B^Y_{\frac{\nu^3}{K}}(x_{ijk}) \cap S^2(B_0)$$

e

$$\begin{aligned}
S^3(B_0) &= \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} \bigcup_{k=1}^{N_\nu} S(B^Y_{\frac{\nu^3}{K}}(x_{ijk}) \cap B_0) \cap S^3(B_0) \\
&= \bigcup_{i=1}^{N_0} \bigcup_{j=1}^{N_\nu} \bigcup_{k=1}^{N_\nu} B^X_{\nu^3}(S(x_{ijk})) \cap S^3(B_0)
\end{aligned}$$

Prosseguindo por indução obtemos $V_n \subset S^{n-1}(B_0)$ com $\# V_n = N_0 N_\nu^{n-1}$

$$S^n(B_0) \subset \cup_{x \in V_n} B^X_{\nu^n}(Sx).$$

Segue de (6) que $S(B_0)$ é relativamente compacto e portanto $\{S^n : n \in \mathbb{N}\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. É claro que $\mathcal{A} \subset S^n(B_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $N(\nu^n, \mathcal{A}) \leqslant N_0 N_\nu^{n-1}$. Segue que

$$\begin{aligned} c(\mathcal{A}) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(N(\nu^n, \mathcal{A}))}{\log \frac{1}{\nu^n}} \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\log(N_0 N_\nu^{n-1})}{\log \frac{1}{\nu^n}} = \frac{\log N_\nu}{\log \frac{1}{\nu}} < \infty \end{aligned}$$

Observe que

$$\mathrm{dist}_H(S^n(B_0), V_n) \leqslant \nu^n.$$

Defina $E_0 = V_0$, $E_{n+1} = V_{n+1} \cup S(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, e $\mathcal{M}_\nu = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}^X$.
É claro que $S(\mathcal{M}_\nu) \subset \mathcal{M}_\nu$ e que

$$\mathrm{dist}_H(S^n(B_0), \mathcal{M}_\nu) \leqslant \nu^n = e^{-n\log\frac{1}{\nu}}.$$

Como B_0 é absorvente, dado $B \subset X$ limitado, existe $C(B) > 0$ tal que

$$\mathrm{dist}_H(S^n(B), \mathcal{M}_\nu) \leqslant C(B)e^{-n\log\frac{1}{\nu}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Resta mostrar que $c(\mathcal{M}_\nu) < \infty$. Primeiramente note que $E_{n+j} \subset S^n B_0$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$ e assim

$$\mathcal{M}_\nu \subset E_0 \cup \cdots \cup E_n \cup \overline{S^n(B_0)}.$$

Agora, $\#(E_0 \cup \cdots \cup E_n) \leqslant [(n+1)^2 - 1] N_0 N_\nu^{n-1}$ e $N(\nu^n, S^n(B_0)) \leqslant N_0 N_\nu^{n-1}$. Assim

$$N(\nu^n, \mathcal{M}_\nu) \leqslant (n+1)^2 N_0 N_\nu^{n-1}.$$

Disto segue que $c(\mathcal{M}_\nu) \leqslant \dfrac{\log N_\nu}{\log(\frac{1}{\nu})}$ e a prova está completa. ∎

No Teorema 5 supomos implicitamente que $S : X \to X$ seja um operador compacto ($S(B_0)$ é um conjunto absorvente compacto).

Estes resultados podem ser estendidos ao caso em que S é soma de um operador compacto com uma contração estrita.

Como conseqüência os resultados que garantem que o atrator global tem dimensão fractal finita também podem ser estendidos (veja [4]).

A. N. Carvalho, J. A. Langa and Robinson, J. C. Finite-dimensional global attractors in Banach spaces, *Journal of Differential Equations*, **249** (12) 3099-3109 (2010).

A. N. Carvalho, J. A. Langa and Robinson, J. C. *Attractors for Infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences **182**, Springer Verlag NY (2013).

A. N. Carvalho and S. Sonner, Pullback exponential attractors for evolution processes in Banach spaces: Theoretical results, Communication on Pure and Applied Analysis **12** (6) 3047-3071 2013.

- J. W. Cholewa, R. Czaja and G. Mola, Remarks on the fractal dimension of bi-space global and exponential attractors. Boll. Unione Mat. Ital. (9) 1 (2008), no. 1, 121-145.
- L. Dung and B. Nicolaenko, Exponential attractors in Banach spaces, *J. Dynam. Differential Equations* **13** (4) (2001) 791-806.
- A. Eden, C. Foias, B. Nikolaenko and R. Temam, *Exponential attractors for dissipative evolution equations*, Research in Applied Mathematics, John Willey & Sons (1994).
- D. E. Edmunds and H. Triebel, Function Spaces, Entropy Numbers and Differential Operators, Cambridge University Tracts **120**, Cambridge University Press (1996).

M. Efendiev, A. Miranville and S. Zelik, Exponencial attractors and finite-dimensional reduction for nonautonomous dynamical systems, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **135A**, 703-730, 2005.

J. K. Hale *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs **25** (American Mathematical Society, Providence, RI) (1988).

D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

W. Hurewicz & H. Wallman, *Dimension Theory* Princeton University Press (1948).

- J. P. Kahane, *Measures et dimensions, Turbulence and the Navier Stokes equation*, Lecture Notes in Mathematics **565** Springer-Verlag, New York, (1976).
- O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolution equations*, Leizioni Lincee, Cambridge Univ. Press, Campridge, UK (1991)
- J. Mallet-Paret, Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright, *J. Differential Equations*, **22** 331–348 (1976).
- R. Mañé, *On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps*, Lecture Notes in Mathematics **898** 230-242 Springer-Verlag, New York, 1981.

J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Pearson Education (2000).

G. Nöbeling; Über eine n-dimensionale Universalmenge im $\mathbb{R}^{2n+1}$, *Math. Ann.* **104** (1) 71-80 (1931).

J. C. Robinson, *Dimension, Embeddings, and Attractors*, Cambridge Tracts in Mathematics **186**, Cambridge University Press, Cabridge UK (2011).

Temam, R. *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Applied Mathematical Sciences **68**, Springer-Verlag (1997)