Über eine n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}.

Von

Georg Nöbeling in Wien.

Unter einem Raum verstehen wir im folgenden stets einen metrischen Raum, in dem eine abzählbare Teilmenge dicht liegt. Menger hat den folgenden Satz ausgesprochen[1]):

Satz 1. *Für beliebiges n ist jeder n-dimensionale Raum mit einer Teilmenge des $(2n+1)$-dimensionalen Cartesischen R_{2n+1} homöomorph.*

Für $n = 0$ ist dies der Satz von Sierpiński[2]), daß jeder im Sinne der Dimensionstheorie nulldimensionale Raum mit einer Teilmenge der Geraden homöomorph ist. Der Beweis des Satzes 1 wurde von Menger für $n = 1$ erbracht und für $n \geqq 2$ skizziert, aber nicht vollständig durchgeführt[3]). Es ist der Zweck dieser Arbeit, den Satz 1 unabhängig von jener Beweisskizze allgemein zu beweisen.

Wir werden mehr beweisen. Nach Menger heißt ein Raum ein n-dimensionaler Universalraum, wenn er selbst n-dimensional ist und zu jedem n-dimensionalen Raum eine homöomorphe Teilmenge enthält. Über die Existenz von Universalräumen behauptet Menger den[4])

Satz 2. *Für jedes n gibt es einen n-dimensionalen Universalraum.*

Für $n = 0$ ist dies bewiesen durch den Satz von Sierpiński[2]), daß das Cantorsche Diskontinuum ein nulldimensionaler Universalraum ist. Für $n = 1$ hat Menger einen eindimensionalen Universalraum im R_3 konstruiert[5]).

Wir wollen nun beweisen, daß *die Menge aller derjenigen Punkte des R_{2n+1}, die höchstens n rationale Koordinaten haben, ein n-dimensionaler Universalraum ist.* Damit werden Satz 1 und Satz 2 bewiesen sein.

* * *

[1]) Menger, „Dimensionstheorie", Teubner 1928, S. 295.

[2]) Sierpiński, Fund. Math. 2, S. 89.

[3]) Menger, „Dimensionstheorie", S. 296 ff.

[4]) Menger, „Dimensionstheorie" S. 315.

[5]) Menger, Proc. Acad. Amsterdam **29**, S. 1125.

Zunächst behaupten wir den

Hilfssatz 1. Sind im k-dimensionalen Cartesischen Raum R_k m nicht notwendig verschiedene Punkte

$$(x_1^\mu, \ldots, x_k^\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

und eine Zahl $\varepsilon > 0$ gegeben, so können wir m Punkte

$$(\bar{x}_1^\mu, \ldots, \bar{x}_k^\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

so wählen, daß erstens

$$(1) \qquad |x_\varkappa^\mu - \bar{x}_\varkappa^\mu| < \varepsilon \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k;\ \mu = 1, \ldots, m)$$

gilt, und zweitens der Rang jeder höchstens $(k+1)$-zeiligen Matrix

$$(2) \qquad M = \left\| \begin{matrix} 1\ \bar{x}_1^{\mu_1} \ldots \bar{x}_k^{\mu_1} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 1\ \bar{x}_1^{\mu_h} \ldots \bar{x}_k^{\mu_h} \end{matrix} \right\|$$

gleich der Anzahl h ihrer Zeilen ist.

Beweis. Nach einem bekannten Satz der Algebra[6]) kann man die Punkte

$$(\bar{x}_1^\mu, \ldots, \bar{x}_k^\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

mit

$$|x_\varkappa^\mu - \bar{x}_\varkappa^\mu| < \varepsilon \quad (\varkappa = 1, \ldots, k;\ \mu = 1, \ldots, m)$$

so wählen, daß alle Determinanten der Matrizen M von Null verschieden sind. Diese Punkte haben die verlangten Eigenschaften.

* * *

Besitzen $n+1$ $(n \geqq 0)$ Punkte $(x_1^\nu, \ldots, x_l^\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n+1)$ des l-dimensionalen Cartesischen Raumes R_l die Eigenschaft, daß die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 1\ x_1^1 \ \ \ldots x_l^1 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 1\ x_1^{n+1} \ldots x_l^{n+1} \end{matrix} \right\|$$

den Rang $n+1$ hat, so nennt man die Menge S aller Punkte $(x_1, \ldots, x_l)$ mit

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x_1^1 + \ldots + \lambda_{n+1} x_1^{n+1} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_l &= \lambda_1 x_l^1 + \ldots + \lambda_{n+1} x_l^{n+1} \\ 1 &= \lambda_1 \quad + \ldots + \lambda_{n+1} \\ \lambda_1 &\geqq 0, \ldots, \lambda_{n+1} \geqq 0 \end{aligned}$$

das von den Punkten $(x_1^\nu, \ldots, x_l^\nu)$ aufgespannte n-dimensionale Simplex. Jedes von $i+1$ $(i \leqq n)$ Punkten $(x_1^{\nu_1}, \ldots, x_l^{\nu_1}), \ldots, (x_1^{\nu_{i+1}}, \ldots, x_l^{\nu_{i+1}})$ aufgespannte Simplex heißt eine i-dimensionale Seite von S; die Punkte $(x_1^\nu, \ldots, x_l^\nu)$ heißen auch Eckpunkte von S.

[6]) Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., 1 (1898), S. 147.

Sind endlich viele höchstens n-dimensionale Simplizes $S_1, \ldots, S_j$ gegeben, von denen wenigstens eines genau n-dimensional ist, und von denen je zwei als Durchschnitt die leere Menge oder eine beiden gemeinsame Seite haben, so nennt man die Summe $K = S_1 + \ldots + S_j$ einen n-dimensionalen Komplex. Die Eckpunkte der Simplizes S_i nennt man die Eckpunkte des Komplexes K.

Es sei im R_l ein beliebiger n-dimensionaler Komplex $K = S_1 + \ldots + S_j$ mit den Eckpunkten $(x_1^\mu, \ldots, x_l^\mu)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ gegeben, wobei jeder Eckpunkt nur einmal aufgeschrieben ist. Wir denken uns seine Darstellung $S_1 + \ldots + S_j$ so gewählt, daß zu jedem Simplex S_i auch alle seine Seiten unter den Simplizes $S_1, \ldots, S_j$ vorkommen. Ist $p = (x_1, \ldots, x_l)$ ein Punkt von K, so gibt es unter den $S_1, \ldots, S_j$ genau ein niedrigstdimensionales Simplex S_i, in dem p liegt. Sind die Punkte $(x_1^{\mu_1}, \ldots, x_l^{\mu_1}), \ldots, (x_1^{\mu_i}, \ldots, x_l^{\mu_i})$ die Ecken von S_i, so gilt

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1 x_1^1 + \ldots + \lambda_m x_1^m \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_l &= \lambda_1 x_l^1 + \ldots + \lambda_m x_l^m \\
1 &= \lambda_1 \quad\ + \ldots + \lambda_m \\
\lambda_{\mu_1} &> 0, \ldots, \lambda_{\mu_i} > 0 \\
\lambda_\mu &= 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \mu_1, \ldots, \mu_i \qquad\qquad (i \leqq n+1), \\
&\mu_1 < \ldots < \mu_i.
\end{aligned}
$$

Diese Darstellung des Punktes p wollen wir die ausgezeichnete Darstellung nennen. Die Parameter λ_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ sind eindeutige, stetige Funktionen von p, und höchstens $n+1$ von ihnen sind von Null verschieden.

Wir behaupten jetzt den

Hilfssatz 2. Ist im l-dimensionalen Cartesischen Raum R_l $(l \geqq 2n+1)$ ein n-dimensionaler Komplex K und eine positive Zahl ε gegeben, so kann man K auf eine Teilmenge K' des $(2n+1)$-dimensionalen Cartesischen Raumes R_{2n+1} derart abbilden, daß, wenn $p = (x_1, \ldots, x_{2n+1}, \ldots, x_l)$ ein Punkt aus K, $p' = (x_1', \ldots, x_{2n+1}')$ sein Bildpunkt in K' ist, die Beziehungen

$$
(5)\qquad |x_i - x_i'| < \varepsilon \qquad\qquad (i = 1, \ldots, 2n+1)
$$

gelten.

Beweis: Es seien $(x_1^\mu, \ldots, x_l^\mu)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ die Eckpunkte des Komplexes K, wobei jeder nur einmal aufgeschrieben ist. Neben jedem Punkte $(x_1^\mu, \ldots, x_l^\mu)$ betrachten wir den Punkt $(x_1^\mu, \ldots, x_{2n+1}^\mu)$ des R_{2n+1}, dessen Koordinaten mit den $2n+1$ ersten Koordinaten des Punktes $(x_1^\mu, \ldots, x_l^\mu)$ übereinstimmen. Auf die m Punkte $(x_1^\mu, \ldots, x_{2n+1}^\mu)$ des R_{2n+1} wenden wir den Hilfssatz 1 an, der uns die Punkte

$$(\bar{x}_1^\mu, \ldots, \bar{x}_{2n+1}^\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

liefert.

Ist nun

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1 x_1^1 + \ldots + \lambda_m x_1^m \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_l &= \lambda_1 x_l^1 + \ldots + \lambda_m x_l^m \\
1 &= \lambda_1 \quad + \ldots + \lambda_m \\
&\lambda_{\mu_1} > 0, \ldots, \lambda_{\mu_i} > 0 \\
&\lambda_\mu = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \mu_1, \ldots, \mu_i \qquad (i \leqq n+1) \\
&\mu_1 < \ldots < \mu_i
\end{aligned}$$

die ausgezeichnete Darstellung eines Punktes $p = (x_1, \ldots, x_l)$ aus K, so ordnen wir ihm den Punkt $p' = (x_1', \ldots, x_{2n+1}')$ mit

$$\begin{aligned}
x_1' &= \lambda_1 \bar{x}_1^1 \quad + \ldots + \lambda_m \bar{x}_1^m \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_{2n+1}' &= \lambda_1 \bar{x}_{2n+1}^1 + \ldots + \lambda_m \bar{x}_{2n+1}^m
\end{aligned}$$

als Bildpunkt zu. Die Menge aller Punkte p' heiße K'.

Diese Abbildung $K \to K'$ hat, wie wir jetzt zeigen wollen, die behaupteten Eigenschaften.

Zunächst ist sie eindeutig und stetig, da die Parameter λ_μ eindeutige und stetige Funktionen von p sind.

Ihre Eineindeutigkeit wird folgendermaßen bewiesen:

Es sei $p' = (x_1', \ldots, x_{2n+1}')$ das Bild der beiden Punkte $p = (x_1, \ldots, x_l)$ mit

$$\begin{aligned}
x_1 &= \lambda_1 x_1^1 + \ldots + \lambda_m x_1^m \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_l &= \lambda_1 x_l^1 + \ldots + \lambda_m x_l^m \\
1 &= \lambda_1 \quad + \ldots + \lambda_m \\
&\lambda_{\mu_1} > 0, \ldots, \lambda_{\mu_i} > 0 \\
&\lambda_\mu = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \mu_1, \ldots, \mu_i \qquad (i \leqq n+1) \\
&\mu_1 < \ldots < \mu_i
\end{aligned}$$

und $q = (y_1, \ldots, y_l)$ mit

$$\begin{aligned}
y_1 &= \lambda_1' x_1^1 + \ldots + \lambda_m' x_1^m \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
y_l &= \lambda_1' x_l^1 + \ldots + \lambda_m' x_l^m \\
1 &= \lambda_1' \quad + \ldots + \lambda_m' \\
&\lambda_{\mu_1'}' > 0, \ldots, \lambda_{\mu_j'}' > 0 \\
&\lambda_\mu' = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \mu_1', \ldots, \mu_j' \qquad (j \leqq n+1) \\
&\mu_1' < \ldots < \mu_j'.
\end{aligned}$$

Dann gelten die Gleichungen

$$\begin{array}{l}
\lambda_{\mu_1}\bar{x}_1^{\mu_1} + \dots + \lambda_{\mu_i}\bar{x}_1^{\mu_i} = \lambda'_{\mu'_1}\bar{x}_1^{\mu'_1} + \dots + \lambda'_{\mu'_j}\bar{x}_1^{\mu'_j} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_{\mu_1}\bar{x}_{2n+1}^{\mu_1} + \dots + \lambda_{\mu_i}\bar{x}_{2n+1}^{\mu_i} = \lambda'_{\mu'_1}\bar{x}_{2n+1}^{\mu'_1} + \dots + \lambda'_{\mu'_j}\bar{x}_{2n+1}^{\mu'_j} \\
\lambda_{\mu_1} + \dots + \lambda_{\mu_i} = \lambda'_{\mu'_1} + \dots + \lambda'_{\mu'_j}.
\end{array}$$

Da aber nach Hilfssatz 1 der Rang der wegen $i \leqq n+1$ und $j \leqq n+1$ höchstens $(2n+2)$-zeiligen Matrix

$$\left\| \begin{array}{llll}
1 & \bar{x}_1^{\mu_1} & \dots & \bar{x}_{2n+1}^{\mu_1} \\
. & . & . & . \\
1 & \bar{x}_1^{\mu_i} & \dots & \bar{x}_{2n+1}^{\mu_i} \\
1 & \bar{x}_1^{\mu'_1} & \dots & \bar{x}_{2n+1}^{\mu'_1} \\
1 & \bar{x}_1^{\mu'_j} & \dots & \bar{x}_{2n+1}^{\mu'_j}
\end{array} \right\|$$

gleich der Anzahl ihrer verschiedenen Zeilen ist, muß $i = j$; $\mu_1 = \mu'_1, \dots, \mu_i = \mu'_j$ und

$$\lambda_{\mu_1} = \lambda'_{\mu'_1}, \dots, \lambda_{\mu_i} = \lambda'_{\mu'_j}$$

sein. Da aber weiter für $\mu \neq \mu_1, \dots, \mu_i$ gilt $\lambda_\mu = \lambda'_\mu = 0$, so sind p und q identisch.

Unsere Abbildung $K \to K'$ ist also eineindeutig und stetig und daher wegen der Kompaktheit von K topologisch.

Ist schließlich $p = (x_1, \dots, x_l)$ ein Punkt aus K, $p' = (x'_1, \dots, x'_{2n+1})$ sein Bildpunkt in K', so gilt

$$x'_\nu - x_\nu = \lambda_1(\bar{x}_\nu^1 - x_\nu^1) + \dots + \lambda_m(\bar{x}_\nu^m - x_\nu^m) \qquad (\nu = 1, \dots, 2n+1).$$

Da aber

$$\lambda_1 \geqq 0, \dots, \lambda_m \geqq 0,$$
$$1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_m,$$

und nach Hilfssatz 1

$$|\bar{x}_\nu^1 - x_\nu^1| < \varepsilon, \dots, |\bar{x}_\nu^m - x_\nu^m| < \varepsilon$$

ist, so folgt

$$|x'_\nu - x_\nu| < \varepsilon \qquad (\nu = 1, \dots, 2n+1).$$

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

* * *

Es sei H der Hilbertsche Raum. Mit R_m wollen wir den m-dimensionalen, durch die Gleichungen,

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = 0$$

definierten Euklidischen Teilraum von H bezeichnen. Sodann bedeute U_n die Menge aller derjenigen Punkte $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$ von R_{2n+1}, für welche höchstens n der Koordinaten $x_1, \dots, x_{2n+1}$ rational sind.

Diese Menge U_n ist höchstens n-dimensional. Bedeutet nämlich V_ν mit $0 \leqq \nu \leqq n$ die Menge aller Punkte des R_{2n+1}, die genau ν rationale Koordinaten haben, so ist $U_n = V_0 + \ldots + V_n$. Die Mengen V_ν sind aber nulldimensional[7]). Also ist die Menge U_n höchstens n-dimensional.

Bezeichnen wir alle n-dimensionalen Ebenen $\subset R_{2n+1}$ der Form

$$x_{i_1} = r_1, \ldots, x_{i_{n+1}} = r_{n+1} \, (1 \leqq i_1 < \ldots < i_{n+1} \leqq 2n+1),$$

wo $r_1, \ldots, r_{n+1}$ rationale Zahlen bedeuten, in irgendeiner Reihenfolge mit $E_1, E_2, \ldots$, so gilt für die Menge U_n die Gleichung

$$U_n = R_{2n+1} - (E_1 + E_2 + \ldots). \tag{6}$$

Wir behaupten jetzt den

Satz. *Jeder n-dimensionale Raum M ist mit einer Teilmenge M^* der Menge U_n homöomorph.*

Beweis. Da nach Hurewicz[8]) jeder n-dimensionale Raum mit einer Teilmenge eines kompakten n-dimensionalen Raumes homöomorph ist, genügt es, unsern Satz für kompakte Räume M zu beweisen.

Da weiter vermöge eines Satzes von Urysohn[9]) jeder kompakte Raum mit einer Teilmenge des Hilbertschen Raumes H homöomorph ist, genügt es für den Beweis unseres Satzes, den Raum M als eine kompakte n-dimensionale Teilmenge des Hilbertschen Raumes H anzunehmen.

Und schließlich bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß für alle Punkte $(x_1, \ldots, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots)$ von M die Gleichungen

$$x_1 = \ldots = x_{2n+1} = 0$$

gelten.

Es sei M_m^k ($k = 1, 2, \ldots$, ad inf.; $m = 1, \ldots, m_k$) eine erzeugende Doppelfolge von M[10]), bestehend aus in M abgeschlossenen Mengen M_m^k.

Wir ordnen nun allen Punkten von M einen beliebigen, aber festen Punkt $\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_{2n+1}, 0, \ldots)$ des R_{2n+1} als Bild zu, wobei $\varrho_1, \ldots, \varrho_{2n+1}$ beliebige Irrationalzahlen sind. Die aus dem Punkte ϱ bestehende Menge heiße M_1. Die Abbildung $M \to M_1$ ist eindeutig und stetig. Die Menge M_1 hat von der Ebene E_1 einen Abstand

$$\eta_1 = \delta(M_1, E_1) > 0. \tag{7}$$

Wir setzen noch

$$\varepsilon_1 = 1. \tag{8}$$

---

[7]) Menger, „Dimensionstheorie", S. 147.

[8]) Proc. Acad. Amsterdam **30** (1927), S. 425.

[9]) Math. Annalen **94** (1924), S. 309; Math. Annalen **92** (1924), S. 302.

[10]) Menger, „Dimensionstheorie", Teubner 1928, S. 61.

Ausgehend von dieser eindeutigen und stetigen Abbildung $M \to M_1$ bilden wir sukzessive für $i = 1, 2, \ldots$, ad inf. die Menge M auf eine Teilmenge M_i des R_{2n+1} eindeutig und stetig ab gemäß der folgenden Induktionsvorschrift:

Liegen für ein natürliches i zwei Zahlen ε_i und η_i und eine eindeutige stetige Abbildung der Menge M auf eine Teilmenge M_i des R_{2n+1} vor, so bezeichnen wir die Bilder der Mengen M_m^k in M_i mit $(M_m^k)_i$ und wählen nun eine positive Zahl ε_{i+1} gemäß folgenden Bedingungen:

$$\varepsilon_{i+1} < \frac{\varepsilon_i}{4}, \tag{9}$$

$$\varepsilon_{i+1} < \frac{\eta_i}{4}, \tag{10}$$

(11) $4\,\varepsilon_{i+1}$ kleiner als der Abstand je zweier fremder Mengen M_m^k mit $k \leqq i$,

(12) $4\,\varepsilon_{i+1}$ kleiner als der Abstand je zweier fremder Mengen $(M_m^k)_i$ mit $k \leqq i$.

Wenn nun $p = (0, \ldots, 0, x_{2n+2}, \ldots)$ ein Punkt aus M und $(x_1, \ldots, x_{2n+1}, 0, \ldots)$ sein Bildpunkt in M_i ist, so ordnen wir dem Punkte p den Punkt $p^i = (x_1, \ldots, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots)$ als Bild zu. Die Menge aller Punkte p^i heiße M^i. Diese Abbildung $M \to M^i$ ist topologisch, denn erstens liegen wegen der Stetigkeit der Abbildung $M \to M_i$ für je zwei hinreichend nahe beieinander liegende Punkte $p = (0, \ldots, 0, x_{2n+2}, \ldots)$ und $q = (0, \ldots, 0, y_{2n+2}, \ldots)$ von M die Koordinaten x_j und y_j $(j \leqq 2n+1)$ ihrer Bildpunkte in M_i und daher auch ihre Bildpunkte p^i und q^i beliebig nahe beieinander; und zweitens gilt für irgendein $j \geqq 2n+2$, wenn p und q verschieden sind, $x_j \neq y_j$, woraus sofort $p^i \neq q^i$ folgt.

Nach Alexandroff[11]) können wir die Menge M^i bei geeigneter Wahl der Zahl $l \geqq 2n+1$ auf einen n-dimensionalen Komplex $K_i \subset R_l$ eindeutig und stetig derart abbilden, daß jeder Punkt $p^i = (x_1, \ldots, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots)$ aus M^i von seinem Bildpunkt $\bar{p}^i = (x_1', \ldots, x_l', 0, \ldots)$ einen Abstand

$$\delta(p^i, \bar{p}^i) < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}} \tag{13}$$

hat, so daß also insbesondere die Ungleichungen

$$|x_j - x_j'| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}} \qquad (j = 1, \ldots, l) \tag{14}$$

gelten.

Nach Hilfssatz 2 können wir den n-dimensionalen Komplex $K_i \subset R_l$ auf eine Menge $K_i' \subset R_{2n+1}$ topologisch derart abbilden, daß, wenn $(x_1', \ldots, x_l', 0, \ldots)$ ein Punkt aus K_i und $(x_1'', \ldots, x_{2n+1}'', 0, \ldots)$ sein Bild-

---

[11]) Alexandroff, Annals of Mathematics (2) **30** (1928), S. 18.

punkt in K_i' ist, die Ungleichungen

$$|x_j' - x_j''| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}} \qquad (j = 1, \ldots, 2n+1) \tag{15}$$

gelten.

Schließlich wählen wir eine positive Zahl $\zeta < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}}$ so klein, daß 3ζ kleiner ist als der Abstand je zweier fremder Bilder von Mengen M_m^k $(k \leqq i)$ in K_i'. Sodann können wir nach Alexandroff[12]) die Menge K_i' auf eine Menge $M_{i+1} \subset R_{2n+1}$ eindeutig und stetig abbilden, so daß erstens der Abstand η_{i+1} der Menge M_{i+1} von der Ebene E_{i+1}

$$\eta_{i+1} = \delta(M_{i+1}, E_{i+1}) > 0 \tag{16}$$

ist, und so, daß zweitens jeder Punkt $(x_1'', \ldots, x_{2n+1}'', 0, \ldots)$ aus K_i' von seinem Bildpunkt $(x_1''', \ldots, x_{2n+1}''', 0, \ldots)$ einen Abstand $< \zeta$ hat; hieraus folgen aber einerseits wegen $\zeta < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}}$ die Ungleichungen

$$|x_j'' - x_j'''| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}} \qquad (j = 1, \ldots, 2n+1), \tag{17}$$

und anderseits haben nach Wahl von ζ die Bilder $(M_{m_1}^k)_{i+1}$ und $(M_{m_2}^k)_{i+1}$ zweier Mengen $M_{m_1}^k$ und $M_{m_2}^k$ $(k \leqq i)$ in M_{i+1} einen Abstand

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta[(M_{m_1}^k)_{i+1}, (M_{m_2}^k)_{i+1}] > 0 & (k \leqq i), \\ \text{falls die Bilder der Mengen } M_{m_1}^k \text{ und } M_{m_2}^k \text{ in } K_i' \text{ fremd sind.} & \end{array}\right. \tag{18}$$

Die durch Aneinanderreihung der eindeutigen stetigen Abbildungen $M \to M^i$, $M^i \to K_i$, $K_i \to K_i'$, $K_i' \to M_{i+1}$ entstehende Abbildung der Menge M auf eine Teilmenge M_{i+1} des R_{2n+1} ist eindeutig und stetig.

Aus der vorgegebenen Abbildung $M \to M_i$ und den Zahlen ε_i und η_i haben wir damit eine Abbildung $M \to M_{i+1}$ und die Zahlen ε_{i+1} und η_{i+1} konstruiert.

Auf Grund dieser Induktionsvorschrift konstruieren wir, ausgehend von der Abbildung $M \to M_1$, sukzessive für $i = 1, 2, \ldots$, ad inf. eine eindeutige stetige Abbildung der Menge M auf eine Teilmenge M_i des R_{2n+1}. Wir wollen jetzt zeigen, daß die Folge der Abbildungen $M \to M_i$ $(i = 1, 2, \ldots$, ad inf.) gegen eine topologische Abbildung der Menge M auf eine Teilmenge M^* des R_{2n+1} konvergiert.

Es sei $p = (0, \ldots, 0, x_{2n+1}, \ldots)$ ein beliebiger Punkt aus M, und es seien $p_i = (x_1, \ldots, x_{2n+1}, 0, \ldots)$ und $p_{i+1} = (x_1''', \ldots, x_{2n+1}''', 0, \ldots)$ seine Bildpunkte in M_i und M_{i+1}. Dann folgen aus (14), (15) und (17) die Ungleichungen

$$|x_j - x_j'''| < \frac{\varepsilon_{i+1}}{\sqrt{2n+1}} \qquad (j = 1, \ldots, 2n+1).$$

[12]) Alexandroff, Göttinger Nachrichten 1928, S. 37.

Also haben die Punkte p_i und p_{i+1} einen Abstand

(19) $$\delta(p_i, p_{i+1}) < \varepsilon_{i+1}.$$

Nun ist wegen (8) und (9)

(20) $$\varepsilon_{i+1} < \frac{1}{4^i}.$$

Also ist wegen (19) und (20) die Punktfolge $p_1, p_2, \ldots$ eine Cauchysche Folge und besitzt daher im R_{2n+1} einen Limes p^*, den wir dem Punkte p als Bild zuordnen. Die Menge aller Punkte p^* heiße M^*. Wir wollen zeigen, daß diese Abbildung $M \to M^*$ topologisch ist.

Ihre Stetigkeit folgt daraus, daß die Folge der eindeutigen stetigen Abbildungen $M \to M_i$ ($i = 1, 2, \ldots$, ad inf.) gegen die Abbildung $M \to M^*$ wegen (19) und (20) gleichmäßig konvergiert.

Um die Eineindeutigkeit der Abbildung $M \to M^*$ zu zeigen, wählen wir zwei verschiedene Punkte p und q von M und haben zu zeigen, daß ihre Bilder p^* und q^* verschieden sind. Zunächst kann man eine Zahl i so finden, daß zwei Mengen $M^i_{m_1}$ und $M^i_{m_2}$, von denen die eine den Punkt p, die andere den Punkt q enthält, einen Abstand

$$\delta(M^i_{m_1}, M^i_{m_2}) > 0$$

haben. Wegen (11) ist also

$$\delta(M^i_{m_1}, M^i_{m_2}) > 4\,\varepsilon_{i+1}.$$

Um so mehr ist, wenn wir mit $(M^i_m)^i$ das Bild von M^i_m in M^i bezeichnen,

$$\delta[(M^i_{m_1})^i, (M^i_{m_2})^i] > 4\,\varepsilon_{i+1},$$

wie sofort aus der Definition der Menge M^i folgt. Hiernach haben wegen (13) und $\frac{\varepsilon_{i+1}}{3\sqrt{2n+1}} < \varepsilon_{i+1}$ die Bilder der Mengen $M^i_{m_1}$ und $M^i_{m_2}$ in K_i einen positiven Abstand. Da aber K_i und K_i' homöomorph sind, haben auch die Bilder der Mengen $M^i_{m_1}$ und $M^i_{m_2}$ in K_i' einen positiven Abstand. Hieraus folgt wegen (18)

$$\delta[(M^i_{m_1})_{i+1}, (M^i_{m_2})_{i+1}] > 0,$$

und daher ist wegen (12)

$$\delta[(M^i_{m_1})_{i+1}, (M^i_{m_2})_{i+1}] > 4\,\varepsilon_{i+2}.$$

Insbesondere haben also die Punkte $p_{i+1} \subset (M^i_{m_1})_{i+1}$ und $q_{i+1} \subset (M^i_{m_2})_{i+1}$ einen Abstand

(21) $$\delta(p_{i+1}, q_{i+1}) > 4\,\varepsilon_{i+2}.$$

Nun folgt für jedes $j > i+1$ aus (9) und (19)

$$\delta(p_{i+1}, q_j) < \varepsilon_{i+2} \cdot \sum_{k=0}^{j-i-2} \frac{1}{4^k} \leqq 2\,\varepsilon_{i+2}.$$

Mithin gilt für den Punkt $p^* = \lim_{i \to \infty} p_i$

$$\delta(p_{i+1}, p^*) \leqq 2\,\varepsilon_{i+2}$$

und analog

$$\delta(q_{i+1}, q^*) \leqq 2\,\varepsilon_{i+2}.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen und (21) folgt

$$\delta(p^*, q^*) > 0,$$

d. h. p^* und q^* sind verschieden. Damit ist die Eineindeutigkeit der Abbildung $M \rightarrow M^*$ gezeigt.

Die Abbildung $M \rightarrow M^*$ ist also eineindeutig und stetig, und daher wegen der Kompaktheit von M topologisch.

Schließlich beweisen wir noch, daß M^* Teilmenge von U_n ist.

Für ein beliebiges natürliches i_0 gilt nach (7) und (16)

$$(22) \qquad \delta(M_{i_0}, E_{i_0}) = \eta_{i_0} > 0.$$

Da nun wegen (10) für $i > i_0$ die Ungleichung

$$\varepsilon_i < \frac{\eta_{i_0}}{4^{i-i_0}}$$

gilt, so folgt aus (19) für jeden Punkt p aus M

$$\delta(p_{i_0}, p_i) \leqq \frac{\eta_{i_0}}{2}$$

und daher für $p^* = \lim_{i \to \infty} p_i$

$$\delta(p_{i_0}, p^*) \leqq \frac{\eta_{i_0}}{2}.$$

Hiernach ist wegen (22)

$$\delta(p^*, E_{i_0}) > 0$$

für jeden Punkt p^*, d. h. die Menge M^* ist zu E_{i_0} fremd.

Nun war aber i_0 beliebig gewählt. Also ist M^* auch zur Menge

$$E_1 + E_2 + \ldots$$

fremd. Wegen (6) ist daher M^* Teilmenge der Menge U_n.

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 27. 3. 1930.)