2.ª Prova - SMA 343 - Espaços Métricos

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Questão	Nota
01.ª	
02.ª	
03.ª	
04.ª	
05.ª	
06.ª	
07.ª	
08.ª	
09.ª	
10.ª	
11.ª	
Total	

Nome: ______________________________

Número USP: ______________________________

14.12.2022

Instruções:

- Escolha 05 questões com uma de cada uma das Partes (I, II, III, IV e V).
- Para cada questão escolhida escolha 01 ítem e justifique.
- Cada questão vale 2.0 pontos, desses 1.0 é o valor da justificativa do ítem escolhido.

PARTE I

1.ª Questão. Seja (X, ρ) um espaço métrico completo. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subset X$ for aberto e denso em X, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ será denso em X.

(2) Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n for não-vazio e limitado, $F_{n+1} \subset F_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^- \neq \varnothing$.

(3) Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, F_n for fechado e $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$, então existem $n_0 \in \mathbb{N}$, $f_0 \in F_{n_0}$ e $r_0 > 0$ tais que $B_{r_0}(f_0) \subset F_{n_0}$.

(4) Toda função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será diferenciável em pelo menos um ponto.

(5) Se, para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_n^{\circ} \subset X$ e $U_n^- = X$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \varnothing$.

2.ª Questão. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

ÍTEM	V OU F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Seja X for um espaço vetorial. Uma base para X é um conjunto linearmente independente de vetores B tal que todo elemento de X pode ser escrito como combinação linear finita de elementos de B. Sabendo que que todo espaço vetorial tem base, se X for um espaço de Banach de dimensão infinita, então nenhuma base de X será enumerável.

(2) Se X for um espaço de Banach e $T : X \to X$ for uma transformação linear limitada e sobrejetora então, existirá $r > 0$ tal que $T(B_1^X(0)) \supset B_r^X(0)$.

(3) Se X for um espaço de Banach e $T : X \to X$ for uma transformação linear limitada e bijetora, então T tem inversa limitada.

(4) Nenhum espaço métrico enumerável pode ser de segunda categoria nele mesmo.

(5) Se X for um espaço de Banach, $T : X \to X$ será uma transformação linear fechada se, e somente se, for uma transformação linear limitada.

Parte II

$\boxed{\textbf{3.ª Questão.}}$ Sejam X e Y espaços de Banach e $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço das transformações lineares e limitadas de X em Y com a norma $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, T será sobrejatora se, e somente se, T for uma aplicação aberta.

(2) Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ for bijetora, então $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

(3) Se $T : X \to Y$ for linear, então $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(4) Se $\{T_n\}$ for uma seqüência em $\mathcal{L}(X,Y)$ e $\{T_n x\}$ for convergente, para cada $x \in X$, com limite Tx, então $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(5) $\mathcal{L}(X,Y)$ será completo.

$\boxed{\textbf{4.ª Questão.}}$ Seja $\ell^p = \{\{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, com a norma $\|\{x_n\}\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, e $\ell_\infty = \{\{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$, com a norma $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Recorde que uma base para um espaço vetorial X é um conjunto linearmente independente de vetores B tal que todo elemento de X é combinação linear finita de elementos de B. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Dado $p \in [1,\infty]$, um subconjunto compacto K de ℓ_p e $\epsilon > 0$, então existirá um subsepaço F, de dimensão finita, tal que $K \subset \{y \in \ell_p : \inf_{f\in F} \|y - f\| < \epsilon\}$.

(2) Se $\delta_i^n = 0$ para $i \neq n$ e $\delta_n^n = 1$, defina $\hat{e}_n = \{\delta_i^n\}_{i\in\mathbb{N}}$. Dado $p \in [1,\infty]$, todo elemento de ℓ_p é limite de combinações lineares finitas de $\{\hat{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(3) ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, possui uma base enumerável enquanto que ℓ_∞ não possui base enumerável.

(4) As combinações lineares finitas de $\{\hat{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ formam um subconjunto denso de ℓ_p, para todo $p \in [1,\infty]$.

(5) Toda cobertura aberta de $\overline{B}_1^{\ell_p}(0)$ tem uma subcobertura enumerável, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Parte III

5.ª Questão. Se (X, ρ) for um espaço métrico e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset X$ for fechado, não-vazio e $A_{n+1} \subset A_n$. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se A_n for conexo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ será conexo.

(2) Se (X, ρ) for compacto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$.

(3) Se A_1 for compacto e A_n for conexo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ será conexo.

(4) Se A_1 for compacto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ será compacto.

(5) Se, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, A_n for conexo, para todo $n \geqslant n_0$ e, para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, A_{n_1} for compacto, então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ será compacto e conexo.

6.ª Questão. Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Toda seqüência em X terá uma subseqüência de Cauchy.

(2) Toda cobertura aberta de X terá um refinamento formado por bolas abertas de mesmo raio.

(3) Existirá uma seqüência $\{x_n\}$ tal que, cada elemento de X será o limite de alguma subseqüência de $\{x_n\}$.

(4) Se $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ for uma seqüência de conjuntos fechados, não vazios, decrescente ($F_i \supset F_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$) e tal que $\operatorname{diam}(F_i) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ será um conjunto unitário.

(5) Se $\{F_i : i \in I\}$ for uma coleção de fechados não vazios e $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$ então, $\bigcap_{i\in J} F_i = \varnothing$, para todo conjunto finito $J \subset I$.

7.ª Questão. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se (X, ρ) e (Y, σ) forem espaços métricos compactos e $f : X \to Y$ for contínua e bijetora, então f será um homeomorfismo.

(2) Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, então (X, ρ) será de segunda categoria nele mesmo.

(3) Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto e $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ for tal que $\sup_{x\in X} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$, então $\{f_n\}$ tem uma subseqüência convergente em $C(X, \mathbb{R})$, com a métrica da convergência uniforme.

(4) Se (X, ρ) for um espaço métrico e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ com X_n compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, então X será separável.

(5) Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, infinito e enumerável, então X terá um ponto de acumulação.

Parte IV

$\boxed{\textbf{08.}^{\underline{\text{a}}}\ \textbf{Questão.}}$ Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto e (Y, σ) for um espaço métrico. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Toda função contínua de X em $\mathbb{R}$ assumirá seu valor máximo e seu valor mínimo.

(2) Toda função contínua de X em Y será uniformemente contínua.

(3) Com a métrica da convergência uniforme, $C(X, Y)$ será separável.

(4) Se f contínua e injetora, X e $Y_f = f(X)$, com a métrica induzida pela métrica de Y, serão homeomorfos.

(5) Se f contínua, $Y_f = f(X)$ com a métrica induzida pela métrica de Y, será de segunda categoria nele mesmo.

$\boxed{\textbf{9.}^{\underline{\text{a}}}\ \textbf{Questão.}}$ Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função contínua. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) $f^{-1}(K)$ será fechado em X sempre que K for compacto em Y.

(2) $f(C)$ será compacto em Y sempre que C for compacto em X.

(3) $f^{-1}(K)$ será limitado em X sempre que K for compacto em Y.

(4) Se (X, ρ) for compacto f será uniformemente contínua.

(5) Se (X, ρ) for compacto então, $f^{-1}(F)$ será compacto em X sempre que F for fechado em Y.

Parte V

$\boxed{\textbf{10.ª Questão.}}$ Use os resultados sobre espaços métricos compactos para qualificar a alternativa como verdadeira ou falsa.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, $\alpha \in (0, 1]$, $H > 0$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(X, \mathbb{R})$, $\sup_{x,y\in X} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant H(\rho(x, y))^\alpha$ e existir $x_0 \in X$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x_0)| < \infty$, então $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ será um subconjunto limitado de $C(X, \mathbb{R})$, com a métrica da convergência uniforme.

(2) Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, $\alpha \in (0, 1]$, $H > 0$ e $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ forem tais que $\sup_{x,y\in X} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant H(\rho(x, y))^\alpha$, então $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ será uma família equicontínua de $C(X, \mathbb{R})$.

(3) Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto e $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ forem tais que $\sup_{x\in X} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$, então cada f_n será uniformente contínua e a família $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ será equicontínua.

(4) Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto e $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(X, \mathbb{R})$, então a família $\{f_n : n \in J\}$ será equicontínua, para cada $J \subset \mathbb{N}$ finito.

(5) Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, $\alpha \in (0, 1]$, $H > 0$, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(X, \mathbb{R})$, $\sup_{x,y\in X} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant H(\rho(x, y))^\alpha$ e existir $x_0 \in X$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x_0)| < \infty$ então, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ terá uma subseqüência convergente em $C(X, \mathbb{R})$, com a métrica da convergência uniforme.

$\boxed{\textbf{11.ª Questão.}}$ Se $\ell_2 = \{\{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ com a norma $\|\{x_n\}\|_{\ell_2} = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$. Qualifique as alternativas abaixo em verdadeira ou falsa.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Existe um compacto $K \subset \ell_2$ com interior diferente do vazio.

(2) $K \subset \ell_2$ será compacto se, e somente se, K for fechado e totalmente limitado.

(3) Existe uma seqüência limitada em ℓ_2 que não possui subseqüência convergente.

(4) Existe uma cobertura aberta de $\bar{B}_1^{\ell_2}(0)$ que não possui subcobertura finita.

(5) O conjunto $\{\{\frac{x_n}{n+1}\} : \|\{x_n\}\|_{\ell_2} \leqslant 1\}$ é um subconjunto totalmente limitado de ℓ_2.