1ª Prova - SMA 343 - Espaços Métricos

PROFESSOR: ALEXANDRE NOLASCO DE CARVALHO

NOME: ____________________

NÚMERO USP: ____________________

17.10.2022

QUESTÃO	NOTA
01.ª	
02.ª	
03.ª	
04.ª	
05.ª	
06.ª	
07.ª	
08.ª	
TOTAL	

INSTRUÇÕES:

- Escolha 05 questões com pelo menos uma de cada uma das divisões (I, II e III)
- Para cada questão escolhida escolha 01 ítem e justifique.
- Cada questão vale 2.0 pontos, desses 1.0 é o valor da justificativa do ítem escolhido.

I - Teoria Geral

1.ª Questão. Seja (X,d) um espaço métrico e $E \subset X$. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) $\partial E = E^{-} \backslash E^{o}$

(2) $\partial E = E^{-} \cap E^{c-}$

(3) $x \in \partial E$ se, e somente se, $x \in E \backslash E^{o}$ ou $x \in E'$.

(4) Se $x \in E^{o}$, então x não é um ponto isolado de E.

(5) $E^{-} = E^{coc}$

2.ª Questão. Sejam $(X, \mathcal{T}(X))$ e $(Y, \mathcal{T}(Y))$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $\mathcal{T}(X)$ for a topologia discreta, então f será contínua.

(2) Se f for contínua de $(X, \mathcal{T}(X))$ em $(Y, \mathcal{T}(Y))$ e $\tilde{\mathcal{T}}(X)$ for menos fina que $\mathcal{T}(X)$, então f será contínua de $(X, \tilde{\mathcal{T}}(X))$ em $(Y, \mathcal{T}(Y))$.

(3) Se $\mathcal{T}(Y)$ for a topologia caótica, então f será contínua.

(4) A topologia menos fina em X que torna f contínua é $\mathcal{T}_f(X) = \{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{T}(Y)\}$.

(5) Se f for contínua de $(X, \mathcal{T}(X))$ em $(Y, \mathcal{T}(Y))$ e $\tilde{\mathcal{T}}(Y)$ for menos fina que $\mathcal{T}(Y)$, então f será contínua de $(X, \mathcal{T}(X))$ em $(Y, \tilde{\mathcal{T}}(Y))$.

II - Espaços Métricos Conexos

3.ª Questão. Seja (X,ρ) um espaço métrico. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $\{A_i\}_{i\in I}$ for uma família de subconjuntos conexos (conexos por caminhos) de X tais que $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, $i,j \in I$, então $A = \cup_{i\in I} A_i$ será conexo (conexo por caminhos).

(2) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for uma família de conexos (conexos por caminhos) de X tais que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$, $n \in \mathbb{N}$, então $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ conexo (conexo por caminhos).

(3) Para todo $n \geqslant 2$, $\mathbb{R}^n \backslash \{x = t\overbrace{(1,\cdots,1)}^{n-vezes} : t \in \mathbb{R}\}$ será localmente conexo por caminhos.

(4) $S^2 \backslash \{(x,y,0) : x^2+y^2=1\}$ é conexa.

(5) $\left\{\left(x, \cos\dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,\infty)\right\} \cup \{0\} \times [-1,1] \cup (0,\infty) \times \{1\}$ é conexo por caminhos mas não é localmente conexo por caminhos.

4.ª Questão. Seja E um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ com a métrica usual. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $n \geqslant 1$ e $\dim(E) = n-1$ então, $\mathbb{R}^n \backslash E$ tem duas componentes conexas.

(2) Se $n \geqslant 2$ e $\dim(E) < n-1$ então, $\mathbb{R}^n \backslash E$ tem uma componente conexa.

(3) Se $n = 3$ e $\dim(E) = 2$ então, $\mathbb{R}^n \backslash E$ não é localmente conexo por caminhos.

(4) Se $n = 2$ e $E = \{0\}$ então, $\mathbb{R}^n \backslash E$ apenas uma componente conexa.

(5) Se $n \geqslant 2$ e $\dim(E) < n-1$ então, $\mathbb{R}^n \backslash E$ é conexo.

5.ª Questão. Seja (X,ρ) um espaço métrico e $A \subset X$. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) SeA for conexo por caminhos então, A^-será conexo por caminhos.

(2) Se A for conexo então, A^o será conexo.

(3) Se A for conexo ∂A será conexa.

(4) Se A^o for conexo então, A será conexo.

(5) Se A^o for conexo e $A \subset A^{o-}$ então, A será conexo.

III - Espaços Métricos Completos

6.ª Questão. Seja (X, ρ) um espaço métrico completo. Para cada ítem assinale V para verdadeiro ou F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Toda contração $T : X \to X$ tem um único ponto fixo em X.

(2) Se $x \in X$, $r > 0$ e $T : X \to X$ for uma contração tal que $T(B_r(x)) \subset B_r(x)$ então, T terá um único ponto fixo em $\bar{B}_r(x)$.

(3) Se ρ for a métrica discreta então, as únicas contrações serão as funções constantes.

(4) Se $T : X \to X$ e $T^n = \overbrace{T \circ T \circ ... \circ T}^{n-vezes}$ for uma contração então, T terá um único ponto fixo.

(5) Se $x \in X$, $r > 0$ e $T : X \to X$ for uma contração tal que $T(B_r(x)) \subset B_r(x)$ então, T tem um único ponto fixo em $B_r(x)$.

7.ª Questão. Para cada ítem assinale V se o espaço for completo e F se o espaço não for completo.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ com a métrica usual.

(2) Todo subconjunto fechado de ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

(3) Subespaço vetorial fechado de um espaço de Banach.

(4) $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, onde $(X, \|\cdot\|_X)$ é Banach.

(5) $C([0,1], \mathbb{R})$ com a norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.

8.ª Questão. Sejam X, Y espaços de Banach $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ funções Lipschitz contínuas com constantes de Lipschitz L_f e L_g. Para cada ítem assinale V para verdadeiro e F para falso.

Ítem	V ou F
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	

(1) Se $L_f.L_g < 1$, $g \circ f : X \to X$ tem um único ponto fixo.

(2) Se $L_f.L_g < 1$, $f \circ g : Y \to Y$ tem um único ponto fixo.

(3) Se $L_g > 1$ e $L_f < 1$ o gráfico de f e o gráfico de g não se interseptam.

(4) Se $L_g \leqslant 1$ e $L_f < 1$ o gráfico de f e o gráfico de g se interseptam.

(5) Se $L_f.L_g < 1$ o gráfico de f e o gráfico de g se interseptam.