Espaços Métricos
Revisão para a Segunda Prova
Aula 29

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

12 de Dezembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Categoria de Baire

Se (X, ρ) for um espaço métrico, recorde que um conjunto $A \subset X$ será **nunca denso** se o seu fecho tiver interior vazio.

Definição (Categoria)

Um conjunto $A \subset X$ será de **Primeira Categoria** *em X se for união enumerável de conjuntos nunca densos, caso contrário ele será de* **Segunda Categoria** *em X.*

O Teorema de Baire

Teorema (Baire)

Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.

Exemplo

- *Todo espaço de Banach é de segunda cateoria nele mesmo.*
- *Um espaço métrico completo que não tem ponto isolado não é enumerável.*
- *Espaços de Banach de dimensão infinita não possuem base (de Hamel) enumerável.*

Aplicações do Teorema de Baire

Definição (Aplicação Aberta e Fechada)

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear.

(1) *Diremos que T será aberta se $T(U)$ for aberto em Y, sempre que U for aberto em X.*

(2) *Diremos que T será fechada se $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ for fechado em $X \times Y$.*

Teorema da Aplicação Aberta

Teorema (da Aplicação Aberta)

Seja X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $T(X)$ for de segunda categoria em Y então,

(a) *T será sobrejetora,*

(b) *T será aberta e*

(c) *Y será de segunda Categoria.*

Corolário

Sejam X e Y espaços de Banach.

(1) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for sobrejetora então, T será aberta.*

(2) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for bijetora então, T será um isomorfismo.*

Princípio da Limitação Uniforme

Teorema (Princípio da Limitação Uniforme)

Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $A \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

a) *Se $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\}$ for de segunda categoria então, $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$.*

b) *Se X for Banach e $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\} = X$ então, $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$.*

Corolário

Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Se $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, $\{T_n x\}$ for convergente com limite Tx, para cada $x \in X$ então, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$.

Teorema do Gráfico Fechado

Teorema (Gráfico Fechado)

Se X e Y forem espaços de Banach e $T : X \to Y$ for fechada então, T será limitada.

Funções contínuas nunca diferenciáveis

Exemplo

Em $C([0,1],\mathbb{R})$ existem funções que não são diferenciáveis em nenhum ponto de $[0,1]$.

Cobertura, Subcobertura e Refinamento

Começamos com algumas definições e resultados gerais que nos levarão à definição de um espaço métrico compacto.

Fixemos um espaço métrico (X, ρ) e $E \subset X$.

Definição (Recobrimento ou Cobertura)

Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ for uma família de subconjuntos de X tal que $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, diremos que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ será uma **cobertura** *de E.*

Definição (Refinamento e Subcobertura)

Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *uma cobertura de* E*,*

Um **refinamento** *de* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *é uma cobertura* $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$ *de* E *tal que, para cada* $\beta \in B$ *existe* $\alpha_\beta \in A$ *tal que* $W_\beta \subset V_{\alpha_\beta}$*.*

Uma **sub-cobertura** *de* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$*, é uma nova cobertura* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ *de* E *com* $A' \subset A$*.*

Conjuntos Totalmente Limitados

Definição (Conjuntos Totalmente Limitados)

Se (X,ρ) for um espaço métrico, diremos que $E\subset X$ será totalmente limitado se, para cada $\epsilon>0$, puder ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ.

Observação

É claro que todo conjunto totalmente E limitado é limitado.

E pode ser limitado e não ser totalmente limitado (e.g. $B_1^{\ell_p}(0)$).

Se E for totalmente limitado então, E^- será totalmente limitado.

Caracterizações

Teorema

Se (X,ρ) for um espaço métrico e $E \subset X$, serão equivalentes:

$a)$ *E é completo e totalmente limitado.*

$b)$ **(A propriedade de Bolzano-Weierstrass)** *Toda seqüência em E tem subseqüência convergente em E.*

$c)$ **(A propriedade de Heine-Borel)** *Toda cobertura aberta de E tem subcobertura finita.*

Definição de Compacidade

Definição (Compacidade)

Em um espaço métrico (X, ρ), um conjunto $E \subset X$ é dito compacto se tem as propriedades a)-c) do teorema anterior e é dito relativamente compacto se E^{-} é compacto.

Todo conjunto relativamente compacto é limitado, a recíproca é falsa, em geral, mas é verdadeira em $\mathbb{R}^n$.

Todo conjunto compacto é fechado e limitado, a recíproca é falsa, em geral, mas vale em $\mathbb{R}^n$.

Primeiros Resultados

Proposição (Caracterização dos Compactos de $\mathbb{R}^n$)

Todo subconjunto fechado e limitado de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ é compacto.

Proposição (Compactos são completos)

Se (X, ρ) for métrico compacto então, (X, ρ) será completo.

Consequentemente,

- todo fechado de um métrico compacto será compacto e
- todo compacto de um espaço métrico qualquer será fechado.

Funções definidas espaços métricos compactos e tomando valores em $\mathbb{R}$ assumem seus valores extremos.

Proposição (Teorema de Weierstrass)

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ para todo $x \in X$.

Lema do recobrimento de Lebesgue

Definição (Número de Lebesgue)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Dada uma cobertura aberta $\{G_i : i \in I\}$ de X, se $r > 0$ for tal que, cada subconjunto de X com diâmetro menor que r estiver contido em G_j, para algum $j \in I$, r será chamado um número de Lebesgue para a cobertura $\{G_i : i \in I\}$.

Proposição (Lema do Recobrimento de Lebesgue)

Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, toda cobertura aberta de X terá um número de Lebesgue.

Estes resultados permitem concluir que

Corolário

Se (X, ρ) for métrico compacto, toda cobertura aberta de X terá um refinamento formado por bolas abertas de mesmo raio.

O Teorema de Mazur

Nesta seção $(X, \|\cdot\|_X)$ será um espaço vetorial normado.

Recorde que $C \subset X$ é convexo, se somente se,

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\} \subset C \text{ sempre que } x, y \in C.$$

Exercício

Mostre que a interseção qualquer de convexos é convexa.

Definição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$.

Definimos a envoltória convexa de K por

$$\mathrm{co}K = \bigcap \{C \subset X : C \text{ é convexo e } C \supset K\}$$

É fácil ver que o fecho de um conjunto convexo é convexo.

Proposição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$. Então,

$$\mathrm{co}K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ e \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Definição

Chamaremos $\overline{\mathrm{co}}K := (\mathrm{co}K)^{-}$ *de envoltória convexa fechada de* K.

Exercício

Mostre que $\overline{\mathrm{co}}K = \bigcap\{F \subset X : F$ *é convexo e* $F = F^{-} \supset K\}$.

Proposição (Teorema de Mazur)

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ *for um espaço vetorial normado e* $K \subset X$ *for totalmente limitado então,* $\mathrm{co}K$ *será totalmente limitada.*

Corolário

Se X *for um espaço de Banach e* $K \subset X$ *for um conjunto compacto então,* $\overline{\mathrm{co}}(K)$ *será compacto.*

Propriedade da Interseção Finita

Teorema

Dada uma coleção $\{F_i : i \in I\}$ de subconjuntos fechados de um espaço métrico compacto X tal que, $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \varnothing$ sempre que $J \subset I$ for finito, então $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \varnothing$.

Interseção de compactos e conexos

Exercício

Se (X, ρ) for métrico e $F, G \subset X$ compactos não vazios com $F \cap G = \varnothing$, mostre que existem $f \in F$ e $g \in G$ tais que $\operatorname{dist}(F, G) = \rho(f, g) > 0$.

Teorema

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. Se $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ for uma seqüência decrescente de conjuntos não vazios, fechados e conexos de X então, a interseção $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ será não vazia e conexa.

Não é verdade, em geral, que interseção infinita de conexos encaixados seja conexa.

Um exemplo simples é dado pela seguinte coleção de conexos

$$\left\{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0\}:-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{1}{n}\leqslant y\leqslant\frac{1}{n}\right\},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

Separabilidade

Definição

Diremos (X, ρ) será um espaço métrico separável se existir um conjunto enumerável $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\} \subset X$ tal que $A^- = X$.

Proposição

Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto então, (X, ρ) será um espaço métrico separável.

Compacidade como invariante topológico

Proposição

Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, (Y, σ) um espaço métrico e $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora então, (Y, σ) será um espaço métrico compacto.

Exercício

Se $(X,\rho),(Y,\sigma)$ forem espaços métricos compactos e $f:X\to Y$ uma função contínua e bijetora então, f será um homeomorfismo.

Proposição

Se (X,ρ) for métrico compacto, (Y,σ) for métrico e $f:X\to Y$ for uma função contínua então, f será uniformemente contínua.

Produto Cartesiano de Compactos

Segue imediatamente de resultados anteriores que

Teorema (Tychonoff)

Sejam $N \in \mathbb{N}^*$ e (X_i, ρ_i), $1 \leqslant i \leqslant N$, espaços métricos compactos.

Então $\left(\prod_{i=1}^{N} X_i, \pi_p\right)$ é um espaço métrico compacto.

Proposição

Sejam (X_i, ρ_i), $i \in \mathbb{N}^*$, *espaços métricos e* $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ *o seu produto. Então,* $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ *será compacto se, e somente se,* (X_i, ρ_i) *for compacto, para cada* $i \in \mathbb{N}^*$.

Lema de Urysohn

A seguir usamos a seguinte versão elementar do Lema de Urysohn.

Lema (Lema de Urysohn)

Seja (X, d) um espaço métrico, $U \subset X$ um aberto e $K \subset U$ um compacto. Então existe uma função contínua $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_U$.

Prova: Basta tomar

$$f(x) = \frac{d(x, U^c)}{d(x, U^c) + d(x, K)}. \square$$

Partição da Unidade

Definição (Partição da Unidade)

Seja X um espaço métrico e $\{U_1, \cdots, U_n\}$ uma cobertura aberta de X. Diremos que uma família $\{\phi_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset C(X, [0,1])$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$ se

$$\mathrm{supp}(\phi_i) = \{x \in X : \phi_i(x) > 0\}^- \subset U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1, \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema (Partição da Unidade)

Seja $\{U_1, \cdots, U_n\}$ cobertura aberta de um métrico compacto (X, ρ).

Então existe uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, \cdots, U_n\}$.

Dimensão Topológica

Definição (Dimensão Topológica)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Diremos que X terá **dimensão topológica** *finita se, e somente se,*

- *existir um natural n tal que, qualquer cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tenha um refinamento $\mathcal{U}'$ para o qual, cada ponto de X pertença a no máximo $n+1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$.*

Neste caso, diremos que $\mathcal{U}'$ tem ordem $n+1$. A **dimensão topológica** $\dim(X)$ *de X é o mínimo n com esta propriedade.*

Este conceito tem a propriedade de que a dimensão de qualquer subconjunto compacto com interior não vazio de $\mathbb{R}^n$ é n e,

Teorema

Se (X, ρ) for métrico compacto com dimensão topológica finita então, X será homeomorfo a algum subconjunto de $\mathbb{R}^{2\dim(X)+1}$.

Terminologia para o Teorema de Arzelá-Ascoli

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. O espaço métrico das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ com a métrica

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

é um espaço métrico completo que denotamos por $C(X, \mathbb{R})$.

Definição (Famílias Uniformemente Limitadas)

Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções será dita **uniformemente limitada** *se for limitada em $C(X,\mathbb{R})$, isto é, se existir $M > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

Definição (Famílias Equicontínuas)

Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções em $C(X,\mathbb{R})$ será chamada **equicontínua** *se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que,*

$$f \in \mathcal{F},\ x, x' \in X,\ \rho(x', x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Exemplo

- *Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, uma coleção finita em $C(X, \mathbb{R})$ será* **equicontínua**
- *Se $L > 0$, f será Lipschitz com constante L se, e somente se, $|f(x) - f(y)| \leqslant L\rho(x, y)$, para todo $x, y \in X$. Se*

$$\mathcal{F}_L = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f \text{ é Lipschitz com constante } L\}$$

então, $\mathcal{F}_L$ é uma família equicontínua e fechada de $C(X, \mathbb{R})$.

Teorema de Arzelá-Ascoli

Teorema (Arzelá-Ascoli)

Se (X,ρ) for compacto, $\mathcal{F} \subset C(X,\mathbb{R})$ será relativamente compacto se, e somente se, for uniformemente limitada e equicontínua.

Lema de Riesz

Vimos que a bola unitária de um espaço vetorial normado X será compacta se, e somente se, X tiver dimensão finita.

Com isto todo compacto em dimensão infinita terá interior vazio.

Isto segue do seguinte resultado:

Lema (Lema de Riesz)

Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ e $\operatorname{dist}(u, M) \geqslant 1 - \epsilon$.

Teorema (Riesz)

Se X for um espaço vetorial normado e $\bar{B}_1(0)=\{x\in X:\|x\|\leqslant 1\}$ for compacta então, X terá dimensão finita.

Segue facilmente do Teorema de Riesz que

Corolário

Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Se $K\subset X$ for compacto então, $K^{\mathrm{o}}=\varnothing$.

Exemplo

Para espaços ℓ_p o corolário acima é trivial pois podemos exibir explicitamente uma seqüência com as propriedades mencionadas na prova do Teorema de Riesz.

Espaços Métricos Separáveis

Diremos que um espaço métrico (X, ρ) será *separável* se X possuir um subconjunto enumerável denso.

Exemplos:

- Todo espaço métrico totalmente limitado.
- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com as métricas usuais são métricos separáveis.
- Os espaços métricos $(X_1, \rho_1), \cdots, (X_n, \rho_n)$ serão separáveis se, e somente se, $(\prod_{i=1}^{n} X_i, \pi_p)$ for separável
- $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ com as métricas usuais são métricos separáveis.
- $\mathbb{R}^n$ com a métrica discreta não é separável.

Proposição

Se (X, d) é um espaço métrico separável e Y é um subconjunto de X então, (Y, d) é separável.

Os espaços ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, são separáveis e ℓ_∞ não é separável.

Para mostrar que ℓ_∞ não é separável usamos o lema a seguir

Lema (Critério negativo para separabilidade)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se existir uma família $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ tal que

$i)$ $\mathcal{O}_i$ seja aberto e não vazio em X, para todo $i \in I$,

$ii)$ $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \varnothing$, se $i \neq j$, e

$iii)$ I não seja enumerável

então, X não será separável.

Separabilidade de $\mathbf{C}(\mathbf{K}, \mathbf{M})$

Teorema

Sejam (K, d_K) e (M, d_M) espaços métricos. Se K for compacto e M for separável, então $C(K, M)$, com a métrica da convergência uniforme, será separável.

Corolário

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então $C(\overline{\Omega}) =: C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ é separável.

O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Teorema (de Aproximação de Weierstrass)

Dados $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\|p - f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

Corolário

$C([a,b],\mathbb{R})$ é separável.

Observação

Para $C([a,b],\mathbb{R})$ *com a norma* $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *mostramos que*

- $C([a,b],\mathbb{R})$ *é um espaço de Banach de dimensão infinita.*
- *As funções de* $C([a,b],\mathbb{R})$ *são uniformemente contínuas.*
- *Os compactos de* $C([a,b],\mathbb{R})$ *tem interior vazio.*
- *Os compactos de* $C([a,b],\mathbb{R})$ *são, exatamente, os conjuntos fechados, limitados e equicontínuos em* $C([a,b],\mathbb{R})$.
- $C([a,b],\mathbb{R})$ *é separável e o subespaço* $P([a,b],\mathbb{R})$ *formado por todos os polinômios é denso em* $C([a,b],\mathbb{R})$.

O Teorema de Stone-Weierstrass

Seja (X,ρ) um espaço métrico compacto e $C(X,\mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a métrica usual, isto é,

$$\rho(f,g) = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X,\mathbb{R})$ definimos a soma $f+g$ e multiplicação $f\cdot g$ de duas funções e a multiplicação af de um escalar a por uma função f.

Um conjunto $A \subset C(X,\mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f,g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f+g \in A$, $f\cdot g \in A$ e $af \in A$.

Exemplo

O conjunto dos polinômios trigonométricos é uma álgebra em $C([a,b],\mathbb{R})$.

Definição (Álgebra gerada)

Se $E \subset C(X,\mathbb{R})$ a interseção de todas as álgebras contendo E é uma álgebra, denotada por $A(E)$, chamada álgebra gerada por E.

Exemplo

Os polinômios reais em uma variável real são gerados por $\{1,x\}$.

É fácil verificar que se $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é uma álgebra então A^- também é uma álgebra (exercício).

Teorema (Stone-Weierstrass Real)

Seja X um espaço métrico compacto e $A \subset C(X, \mathbb{R})$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$ e se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Então, $A = C(X, \mathbb{R})$.

Teorema (Stone-Weierstrass Complexo)

Seja X um espaço métrico compacto e $A \subset C(X, \mathbb{C})$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$, se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$ e se $\bar{f} \in A$ sempre que $f \in A$. Então, $A = C(X, \mathbb{C})$.

Corolário

Toda função contínua a valores reais ou complexos definida em um conjunto compacto X de $\mathbb{R}^n$ é limite uniforme de uma seqüência de polinômios em n variáveis reais.

Corolário

Se $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$, *dada uma função contínua* $f : B \to B$ *e* $\epsilon > 0$ *existe* $p : B \to B$ ($p = (p_1, \ldots, p_n)$, p_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *polinômios*) *tal que* $\sup_{x \in B} \|f(x) - p(x)\| < \epsilon$.