Espaços Métricos
Espaços Métricos Separáveis
Aula 28

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

07 de Dezembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Vimos que, se (K, d_K) e (M, d_M) forem espaços métricos, K for compacto e M for separável, então $C(K, M)$ será separável.

No caso particular $K = [a, b]$ e $M = \mathbb{R}$, a prova da separabilidade de $C([a, b], \mathbb{R})$ também pode ser feita utilizando o Teorema de Aproximação de Weierstrass que apresentamos a seguir.

Teorema (de Aproximação de Weierstrass)

Dados $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\|p - f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

Prova: Faremos a prova para $a = 0$ e $b = 1$. O caso geral será deixado como exercício.

Seja $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e os polinômios de Bernstein

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

associados a f. Note que se $f \equiv 1$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1. \tag{1}$$

Derivando a identidade anterior, obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k(1-x) - (n-k)x]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx) = 0.$$

Multiplicando por $x(1-x)$ obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k}(1-x)^{n-k}(k-nx) = 0.$$

Derivando novamente e multiplicando por $x(1-x)$ e usando (1)

$$-nx(1-x)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)^2=0. \qquad (2)$$

Dividindo esta última expressão por n^2 obtemos

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big(x-\frac{k}{n}\Big)^2=\frac{x(1-x)}{n}. \qquad (3)$$

É claro que

$$|f(x)-B_n(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

Como f é uniformemente contínua em $[0,1]$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x - \frac{k}{n}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\frac{k}{n})| < \epsilon/2$.

Agora, para qualquer $x \in [0,1]$ fixo, separamos a soma do lado direito em duas partes, denotadas por Σ e Σ', onde

- Σ é a soma dos termos para os quais $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ e
- Σ' é a soma dos termos remanescentes.

É claro que $\Sigma < \epsilon/2$. Provaremos que, para n suficientemente grande e independentemente de x, $\Sigma' < \epsilon/2$.

Como f é limitada existe $K > 0$ tal que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant K$. Segue que

$$\sum{}' \leqslant 2K \sum_{\substack{1\leqslant k\leq n\\ |x-\frac{k}{n}|\geq\delta}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 2K\sum{}''.$$

De (3) obtemos que

$$\frac{\delta^2}{2K}\sum{}' \leqslant \delta^2\sum{}'' \leqslant \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Isto prova o resultado. □

Corolário

$C([a,b],\mathbb{R})$ é separável.

Observação

Para $C([a,b],\mathbb{R})$ com a norma $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ mostramos que

- *$C([a,b],\mathbb{R})$ é um espaço de Banach de dimensão infinita.*
- *As funções de $C([a,b],\mathbb{R})$ são uniformemente contínuas.*
- *Os compactos de $C([a,b],\mathbb{R})$ tem interior vazio.*
- *Os compactos de $C([a,b],\mathbb{R})$ são, exatamente, os conjuntos fechados, limitados e equicontínuos em $C([a,b],\mathbb{R})$.*
- *$C([a,b],\mathbb{R})$ é separável e o subespaço $P([a,b],\mathbb{R})$ formado por todos os polinômios é denso em $C([a,b],\mathbb{R})$.*

Observação

O Espaço $C_c((0,1),\mathbb{R})$ das funções de $C([a,b],\mathbb{R})$ tais que

$$\mathrm{supp}(f) = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}^- \subset (0,1),$$

é denso em $C_0([0,1],\mathbb{R}) = \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$.

De fato: Dado $\epsilon > 0$ e $f \in C_0([0,1],\mathbb{R})$, seja $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $|f(x)| < \epsilon$, sempre que $x \in [0,\delta] \cup [1-\delta, 1]$.

Se $h \in C_c((0,1),[0,1])$ for tal que $h \equiv 1$ em $[\delta, 1-\delta]$, então

$$f_\epsilon = h \cdot f \in C_c((0,1),\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \max_{x\in[0,1]} |f(x) - f_\epsilon(x)| < \epsilon.$$

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto e $C(X, \mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a métrica usual, isto é,

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X, \mathbb{R})$ definimos a soma $f+g$ e multiplicação $f \cdot g$ de duas funções além da multiplicação af de um escalar a por uma função f de forma usual.

Um conjunto $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f, g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f + g \in A$, $f \cdot g \in A$ e $af \in A$.

Exemplo

O conjunto dos polinômios trigonométricos é uma álgebra em $C([0,2\pi],\mathbb{R})$.

Definição (Álgebra gerada)

Se $E \subset C(X,\mathbb{R})$ a interseção de todas as álgebras contendo E é uma álgebra, denotada por $A(E)$, chamada álgebra gerada por E.

Exemplo

Os polinômios reais em uma variável real são gerados por $\{1,x\}$.

O Teorema de Stone-Weierstrass

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto e $C(X, \mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a métrica usual

$$\rho_\infty(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X, \mathbb{R})$ definimos a soma $f + g$ e a multiplicação $f \cdot g$ de duas funções além da multiplicação af de um escalar a por uma função f de forma usual.

Um conjunto $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f, g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f + g \in A$, $f \cdot g \in A$ e $af \in A$.

É fácil verificar que se $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é uma álgebra então A^- também é uma álgebra (exercício).

Teorema (Stone-Weierstrass Real)

Seja X um espaço métrico compacto e $A \subset C(X, \mathbb{R})$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$ e se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Então, $A = C(X, \mathbb{R})$.

Prova: Note que, se $f \in A$ então, $|f| \in A$.

De fato: Se $\max_{x \in X} |f(x)| < M$, $\epsilon > 0$, $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ for um polinômio (do Teorema de Aproximação de Weierstrass) tal que

$$||t| - p(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [-M, M],$$

e $p(f) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$, então $p(f) \in A$ e

$$||f(x)| - p(f(x))| < \epsilon, \quad x \in X.$$

Segue do fato que A é fechada em $C(X, \mathbb{R})$ que $|f| \in A$.

Note ainda que, se $h, g \in A$ então, $\max\{h, g\} \in A$ e $\min\{h, g\} \in A$.

De fato: Simplesmente observe que

$$\min\{h, g\} = \frac{1}{2}(h+g) - \frac{1}{2}|h-g| \in A \quad \text{e}$$

$$\max\{h, g\} = \frac{1}{2}(h+g) + \frac{1}{2}|h-g| \in A.$$

Construção da Aproximação

Seja $x, y \in X$ com $x \neq y$ e $f \in C(X, \mathbb{R})$. A função constante g^x com valor $f(x)$ está em A (aqui usamos que $1 \in A$).

Seja $h^y \in A$ tal que $h^y(x) \neq h^y(y)$. Sem perda de generalidade assumimos $h^y(x) = 0$ (aqui usamos novamente que $1 \in A$).

Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{xy} = g^x + ah^y \in A$$

satisfaz $f_{xy}(x) = f(x)$ e $f_{xy}(y) = f(y)$.

Seja $\epsilon > 0$, para cada $y \in X$ existe uma bola aberta B_y tal que $y \in B_y$ e $f_{xy}(z) < f(z) + \epsilon$, $\forall z \in B_y$.

Como X é compacto temos que $B_{y_1}, \dots, B_{y_n}$ cobrem X para alguma escolha de $y_1, \dots, y_n$. Seja

$$f_x = \min\{f_{xy_1}, \dots, f_{xy_n}\}.$$

Então $f_x \in A$, $f_x(x) = f(x)$ e para $z \in X$, $f_x(z) < f(z) + \epsilon$. Agora, para $x \in X$, existe uma bola aberta B_x tal que, $\forall z \in B_x$

$$f_x(z) > f(z) - \epsilon.$$

Como X é compacto, um número finito dessas bolas $B_{x_1}, \dots, B_{x_n}$ cobrem X. Seja

$$F = \max\{f_{x_1}, \dots, f_{x_n}\}.$$

Então $F \in A$ e $\forall z \in X$,

$$|f(z) - F(z)| < \epsilon$$

o que prova o teorema. $\square$

Teorema (Stone-Weierstrass Complexo)

Seja X um espaço métrico compacto e $A \subset C(X,\mathbb{C})$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$, se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$ e se $\bar{f} \in A$ sempre que $f \in A$. Então, $A = C(X,\mathbb{C})$.

Prova: Como, para toda $f \in A$, as funções

$$\mathrm{Re}f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \text{ e } \mathrm{Im}f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$$

pertencem a A, o subconjunto A_0 de A das funções contínuas em X com valores reais é $C(X, \mathbb{R})$. O restante da prova é imediata. □

Corolário

Toda função contínua a valores reais ou complexos definida em um conjunto compacto X de $\mathbb{R}^n$ é limite uniforme de uma seqüência de polinômios em n variáveis reais.

Corolário

Se $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$, *dada uma função contínua* $f : B \to B$ *e* $\epsilon > 0$ *existe* $p : B \to B$ $(p = (p_1, \ldots, p_n)$, p_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *polinômios*) *tal que* $\sup_{x \in B} \|f(x) - p(x)\| < \epsilon$.

Prova: Sabemos que, dado $\epsilon > 0$,

$$\|(1-\frac{\epsilon}{2})f(x)\| \leqslant 1-\frac{\epsilon}{2}, \ \forall x \in B.$$

Do Corolário 2, existem polinômios p_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, tais que

$$|p_i(x)-(1-\frac{\epsilon}{2})f_i(x)|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4n}, \ \forall x \in B.$$

Se $p = (p_1, \ldots, p_n)$ temos que $\sup\limits_{x \in B} \|p(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

Segue que

$$\|p(x)\| \leqslant \|p(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\| + \|(1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\|$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2} + (1 - \frac{\epsilon}{2}) = 1, \ \forall x \in B$$

e que

$$\|p(x) - f(x)\| \leqslant \|p(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\| + \|(1 - \frac{\epsilon}{2})f(x) - f(x)\|$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \ \forall x \in B. \ \square$$