# Espaços Métricos
# Revisão para a Segunda Prova
# Aula 27

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

14 de Novembro de 2020

**Segundo Semestre de 2020**

# Categoria de Baire

Se $(X, \rho)$ for um espaço métrico, recorde que um conjunto $A \subset X$ será **nunca denso** se o seu fecho tiver interior vazio.

## Definição (Categoria)

*Um conjunto $A \subset X$ será de* **Primeira Categoria** *em $X$ se for união enumerável de conjuntos nunca densos, caso contrário ele será de* **Segunda Categoria** *em $X$.*

# O Teorema de Baire

## Teorema (Baire)

*Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.*

## Exemplo

- *Todo espaço de Banach é de segunda cateoria nele mesmo.*
- *Espaços métricos completos que não possuem pontos isolados não serão enumeráveis.*
- *Espaços de Banach de dimensão infinita não possuem base (de Hamel) enumerável.*

# Aplicações do Teorema de Baire

## Definição (Aplicação Aberta e Fechada)

*Sejam $X, Y$ espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear.*

(1) *Diremos que $T$ será aberta se $T(U)$ for aberto em $Y$, sempre que $U$ for aberto em $X$.*

(2) *Diremos que $T$ será fechada se $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ for fechado em $X \times Y$.*

# Teorema da Aplicação Aberta

## Teorema (da Aplicação Aberta)

*Seja $X$ um espaço de Banach e $Y$ um espaço vetorial normado.*

*Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $T(X)$ for de segunda categoria em $Y$ então,*

(a) *$T$ será sobrejetora,*

(b) *$T$ será aberta e*

(c) *$Y$ será de segunda Categoria.*

## Corolário

*Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach.*

(1) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for sobrejetora então, $T$ será aberta.*

(2) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for bijetora então, $T$ será um isomorfismo.*

# Princípio da Limitação Uniforme

**Teorema (Princípio da Limitação Uniforme)**

*Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados e $A \subset \mathcal{L}(X, Y)$.*

a) *Se $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\}$ for de segunda categoria então, $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$.*

b) *Se $X$ for Banach e $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\} = X$ então, $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$.*

## Corolário

*Sejam $X$ um espaço de Banach e $Y$ um espaço vetorial normado. Se $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, $\{T_n x\}$ for convergente com limite $Tx$, para cada $x \in X$ então, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$.*

# Teorema do Gráfico Fechado

## Teorema (Gráfico Fechado)

*Se $X$ e $Y$ forem espaços de Banach e $T : X \to Y$ for fechada então, $T$ será limitada.*

# Funções contínuas nunca diferenciáveis

## Exemplo

*Em $C([0,1],\mathbb{R})$ existem funções que não são diferenciáveis em nenhum ponto de $[0,1]$.*

# Cobertura, Subcobertura e Refinamento

Começamos com algumas definições e resultados gerais que nos levarão à definição de um espaço métrico compacto.

Fixemos um espaço métrico $(X, \rho)$ e $E \subset X$.

**Definição (Recobrimento ou Cobertura)**

*Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ for uma família de subconjuntos de $X$ tal que $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, diremos que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ será uma* **cobertura** *de $E$.*

## Definição (Refinamento e Subcobertura)

*Seja* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *uma cobertura de* $E$,

*Um* **refinamento** *de* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *é uma cobertura* $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$ *de* $E$ *tal que, para cada* $\beta \in B$ *existe* $\alpha_\beta \in A$ *tal que* $W_\beta \subset V_{\alpha_\beta}$.

*Uma* **sub-cobertura** *de* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$, *é uma nova cobertura* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ *de* $E$ *com* $A' \subset A$.

# Conjuntos Totalmente Limitados

## Definição (Conjuntos Totalmente Limitados)

*Se $(X, \rho)$ for um espaço métrico, diremos que $E \subset X$ será totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, puder ser coberto por um número finito de bolas de raio $\epsilon$.*

## Observação

*É claro que todo conjunto totalmente $E$ limitado é limitado.*

*$E$ pode ser limitado e não ser totalmente limitado (e.g. $B_1^{\ell_p}(0)$).*

*Se $E$ for totalmente limitado então, $E^-$ será totalmente limitado.*

# Caracterizações

**Teorema**

*Se $(X, \rho)$ for um espaço métrico e $E \subset X$, serão equivalentes:*

a) *$E$ é completo e totalmente limitado.*

b) **(A propriedade de Bolzano-Weierstrass)**
*Toda seqüência em $E$ tem subseqüência convergente em $E$.*

c) **(A propriedade de Heine-Borel)**
*Toda cobertura aberta de $E$ tem subcobertura finita.*

# Definição de Compacidade

## Definição (Compacidade)

*Em um espaço métrico $(X, \rho)$, um conjunto $E \subset X$ é dito compacto se tem as propriedades a)-c) do teorema anterior e é dito relativamente compacto se $E^{-}$ é compacto.*

Todo conjunto relativamente compacto é limitado, a recíproca é falsa, em geral, mas é verdadeira em $\mathbb{R}^n$.

Todo conjunto compacto é fechado e limitado, a recíproca é falsa, em geral, mas vale em $\mathbb{R}^n$.

# Primeiros Resultados

## Proposição (Caracterização dos Compactos de $\mathbb{R}^n$)

*Todo subconjunto fechado e limitado de* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *é compacto.*

## Proposição (Compactos são completos)

*Se* $(X, \rho)$ *for métrico compacto então,* $(X, \rho)$ *será completo.*

Consequentemente,

- todo fechado de um métrico compacto será compacto e
- todo compacto de um espaço métrico qualquer será fechado.

Funções definidas espaços métricos compactos e tomando valores em $\mathbb{R}$ assumem seus valores extremos.

### Proposição (Teorema de Weierstrass)

*Seja $(X, \rho)$ um espaço métrico compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ para todo $x \in X$.*

# Lema do recobrimento de Lebesgue

## Definição (Número de Lebesgue)

*Seja $(X, \rho)$ um espaço métrico.*

*Dada uma cobertura aberta $\{G_i : i \in I\}$ de $X$, se $r > 0$ for tal que, cada subconjunto de $X$ com diâmetro menor que $r$ estiver contido em $G_j$, para algum $j \in I$, a será camado um número de Lebesgue para a cobertura $\{G_i : i \in I\}$.*

## Proposição (Lema do Recobrimento de Lebesgue)

*Se $(X, \rho)$ for um espaço métrico compacto, toda cobertura aberta de $X$ terá um número de Lebesgue.*

Estes resultado permite concluir que

**Corolário**

*Se $(X, \rho)$ for métrico compacto, toda cobertura aberta de $X$ terá um refinamento formado por bolas abertas de mesmo raio.*

# O Teorema de Mazur

Nesta seção $(X, \|\cdot\|_X)$ será um espaço vetorial normado.

Recorde que $C \subset X$ é convexo, se somente se,

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\} \subset C \text{ sempre que } x, y \in C.$$

## Exercício

*Mostre que a interseção qualquer de convexos é convexa.*

## Definição

*Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$.*

*Definimos a envoltória convexa de $K$ por*

$$\mathrm{co}K = \bigcap \{C \subset X : C \text{ é convexo e } C \supset K\}$$

## Exercício

*Mostre que o fecho de um conjunto convexo é convexo.*

## Proposição

*Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$. Então,*

$$\mathrm{co}K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ \ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ \ e\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

## Definição

*Chamaremos* $\overline{\mathrm{co}}K := (\mathrm{co}K)^-$ *de envoltória convexa fechada de* $K$.

## Exercício

*Mostre que* $\overline{\mathrm{co}}K = \bigcap\{F \subset X : F$ *é convexo e* $F = F^- \supset K\}$.

## Proposição (Teorema de Mazur)

*Se* $(X, \|\cdot\|_X)$ *for um espaço vetorial normado e* $K \subset X$ *for totalmente limitado então,* $\mathrm{co}K$ *será totalmente limitada.*

## Corolário

*Se* $X$ *for um espaço de Banach e* $K \subset X$ *for um conjunto compacto então,* $\overline{\mathrm{co}}(K)$ *será compacto.*

# Propriedade da Interseção Finita

**Teorema**

*Dada uma coleção $\{F_i : i \in I\}$ de subconjuntos fechados de um espaço métrico compacto $X$ tal que, $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$ sempre que $J \subset I$ for finito, então $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.*

# Interseção de compactos e conexos

## Exercício

*Se $(X,\rho)$ for métrico e $F,G\subset X$ compactos não vazios com $F\cap G=\varnothing$, mostre que existem $f\in F$ e $g\in G$ tais que $\mathrm{dist}(F,G)=\rho(f,g)>0$.*

## Teorema

*Seja $(X,\rho)$ um espaço métrico compacto. Se $\{M_i : i\in\mathbb{N}\}$ for uma seqüência decrescente de conjuntos não vazios, fechados e conexos de $X$ então, a interseção $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ será não vazia e conexa.*

Não é verdade, em geral, que interseção infinita de conexos encaixados seja conexa.

Um exemplo simples é dado pela seguinte coleção de conexos

$$\left\{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\}:-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{1}{n}\leqslant y\leqslant\frac{1}{n}\right\},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

# Separabilidade

## Definição

*Diremos $(X, \rho)$ será um espaço métrico separável se existir um conjunto enumerável $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\} \subset X$ tal que $A^- = X$.*

## Proposição

*Se $(X, \rho)$ for um espaço métrico compacto então, $(X, \rho)$ será um espaço métrico separável.*

# Compacidade como invariante topológico

## Proposição

*Se $(X, \rho)$ for um espaço métrico compacto, $(Y, \sigma)$ um espaço métrico e $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora então, $(Y, \sigma)$ será um espaço métrico compacto.*

## Exercício

*Se $(X,\rho),(Y,\sigma)$ forem espaços métricos compactos e $f : X \to Y$ uma função contínua e bijetora então, $f$ será um homeomorfismo.*

## Proposição

*Se $(X,\rho)$ for métrico compacto, $(Y,\sigma)$ for métrico e $f : X \to Y$ for uma função contínua então, $f$ será uniformemente contínua.*

# Produto Cartesiano de Compactos

Segue imediatamente de resultados anteriores que

**Teorema (Tychonoff)**

*Sejam $N \in \mathbb{N}^*$ e $(X_i, \rho_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, espaços métricos compactos.*

*Então $\left(\prod_{i=1}^{N} X_i, \pi_p\right)$ é um espaço métrico compacto.*

## Proposição

*Sejam* $(X_i, \rho_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$, *espaços métricos e* $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ *o seu produto. Então,* $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ *será compacto se, e somente se,* $(X_i, \rho_i)$ *for compacto, para cada* $i \in \mathbb{N}^*$.

# Lema de Urysohn

A seguir usamos a seguinte versão elementar do Lema de Urysohn.

**Lema (Lema de Urysohn)**

*Seja $(X, d)$ um espaço métrico, $U \subset X$ um aberto e $K \subset U$ um compacto. Então existe uma função contínua $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_U$.*

**Prova:** Basta tomar

$$f(x) = \frac{d(x, U^c)}{d(x, U^c) + d(x, K)}. \square$$

# Partição da Unidade

## Definição (Partição da Unidade)

*Seja $X$ um espaço métrico e $\{U_1, \cdots, U_n\}$ uma cobertura aberta de $X$. Diremos que uma família $\{\phi_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset C(X, [0,1])$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$ se*

$$\mathrm{supp}(\phi_i) = \{x \in X : \phi_i(x) > 0\}^- \subset U_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1, \text{ para todo } x \in X.$$

### Teorema (Partição da Unidade)

*Seja* $\{U_1, \cdots, U_n\}$ *cobertura aberta de um métrico compacto* $(X, \rho)$.

*Então existe uma partição da unidade subordinada a* $\{U_1, \cdots, U_n\}$.

# Dimensão Topológica

## Definição (Dimensão Topológica)

*Seja $(X, \rho)$ um espaço métrico.*

*Diremos que $X$ terá* **dimensão topológica** *finita se, e somente se,*

- *existir um natural $n$ tal que, qualquer cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $X$ tenha um refinamento $\mathcal{U}'$ para o qual, cada ponto de $X$ pertença a no máximo $n+1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$.*

*Neste caso, diremos que $\mathcal{U}'$ tem ordem $n+1$. A* **dimensão topológica** $\dim(X)$ *de $X$ é o mínimo $n$ com esta propriedade.*

Este conceito tem a propriedade de que a dimensão de qualquer subconjunto compacto com interior não vazio de $\mathbb{R}^n$ é $n$ e,

**Teorema**

*Se $(X, \rho)$ for métrico compacto com dimensão topológica finita então, $X$ será homeomorfo a algum subconjunto de $\mathbb{R}^{2\dim(X)+1}$.*

# Terminologia para o Teorema de Arzelá-Ascoli

Seja $(X, \rho)$ um espaço métrico compacto. O espaço métrico das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ com a métrica

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

é um espaço métrico completo que denotamos por $C(X, \mathbb{R})$.

## Definição (Famílias Uniformemente Limitadas)

*Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções será dita* **uniformemente limitada** *se for limitada em $C(X,\mathbb{R})$, isto é, se existir $M > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

## Definição (Famílias Equicontínuas)

*Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções em $C(X,\mathbb{R})$ será chamada* **equicontínua** *se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que,*

$$f \in \mathcal{F},\ x, x' \in X,\ \rho(x', x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

## Exemplo

- *Uma coleção finita em $C(X,\mathbb{R})$ será* **equicontínua**
- *Se $L>0$, $f$ será Lipschitz com constante $L$ se, e somente se,* $|f(x)-f(y)| \leqslant L\,\rho(x,y)$, *para todo $x,y\in X$. Se*

$$\mathcal{F}_L = \{f \in C(X,\mathbb{R}) : f \text{ é Lipschitz com constante } L\}$$

*então, $\mathcal{F}_L$ é uma família equicontínua e fechada de $C(X,\mathbb{R})$.*

# Teorema de Arzelá-Ascoli

**Teorema (Arzelá-Ascoli)**

*Se $(X, \rho)$ for compacto, $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R})$ será relativamente compacto se, e somente se, for uniformemente limitada e equicontínua.*

# Lema de Riesz

Nesta seção mostraremos que a bola unitária de um espaço vetorial normado $X$ será compacta se, e somente se, $X$ tiver dimensão finita.

Concluiremos, com isto, que todo compacto em dimensão infinita terá interior vazio.

Começamos com o seguinte resultado:

## Lema (Lema de Riesz)

*Seja $X$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ e $\operatorname{dist}(u, M) \geqslant 1 - \epsilon$.*

## Teorema (Riesz)

*Se $X$ for um espaço vetorial normado e $\bar{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ for compacta então, $X$ terá dimensão finita.*

Segue facilmente do Teorema de Riesz que

## Corolário

*Seja $X$ um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Se $K \subset X$ for compacto então, $K^{\mathrm{o}} = \varnothing$.*

## Exemplo

*Para espaços $\ell_p$ o corolário acima é trivial pois podemos exibir explicitamente uma seqüência com as propriedades mencionadas na prova do Teorema de Riesz.*

# Espaços Métricos Separáveis

Diremos que um espaço métrico $(X, \rho)$ será *separável* se $X$ possuir um subconjunto enumerável denso.

**Exemplos:**

- Todo espaço métrico totalmente limitado.
- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com as métricas usuais são métricos separáveis.
- Os espaços métricos $(X_1, \rho_1), \cdots, (X_n, \rho_n)$ serão separáveis se, e somente se, $(\prod_{i=1}^n X_i, \pi_p)$ for separável
- $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ com as métricas usuais são métricos separáveis.
- $\mathbb{R}^n$ com a métrica discreta não é separável.

## Proposição

*Se $(X,d)$ é um espaço métrico separável e $Y$ é um subconjunto de $X$ então, $(Y,d)$ é separável.*

Os espaços $\ell_p$, $1 \leqslant p < \infty$, são separáveis e que $\ell_\infty$ não é separável.

Para mostrar que $\ell_\infty$ não é separável usamos o lema a seguir

**Lema (Critério negativo para separabilidade)**

*Seja $(X, \rho)$ um espaço métrico. Se existir uma família $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ tal que*

*i) $\mathcal{O}_i$ seja aberto e não vazio em $X$, para todo $i \in I$,*

*ii) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \varnothing$, se $i \neq j$, e*

*iii) $I$ não seja enumerável*

*então, $X$ não será separável.*

# Separabilidade de $\mathbf{C}(\mathbf{K},\mathbf{M})$

## Teorema

*Sejam $(K, d_K)$ e $(M, d_M)$ espaços métricos. Se $K$ for compacto e $M$ for separável, então $C(K, M)$, com a métrica da convergência uniforme, será separável.*

## Corolário

*Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então $C(\overline{\Omega}) =: C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ é separável.*

# O Teorema de Aproximação de Weierstrass

## Teorema (de Aproximação de Weierstrass)

*Dados $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ e $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\|p - f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.*

## Corolário

*$C([a,b],\mathbb{R})$ é separável.*

## Observação

*Para* $C([a,b],\mathbb{R})$ *com a norma* $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *mostramos que*

- $C([a,b],\mathbb{R})$ *é um espaço de Banach de dimensão infinita.*
- *As funções de* $C([a,b],\mathbb{R})$ *são uniformemente contínuas.*
- *Os compactos de* $C([a,b],\mathbb{R})$ *tem interior vazio.*
- *Os compactos de* $C([a,b],\mathbb{R})$ *são, exatamente, os conjuntos fechados, limitados e equicontínuos em* $C([a,b],\mathbb{R})$.
- $C([a,b],\mathbb{R})$ *é separável e o subespaço* $P([a,b],\mathbb{R})$ *formado por todos os polinômios é denso em* $C([a,b],\mathbb{R})$.

# O Teorema de Stone-Weierstrass

Seja $(X, \rho)$ um espaço métrico compacto e $C(X, \mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de $X$ em $\mathbb{R}$ com a métrica usual, isto é,

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X, \mathbb{R})$ definimos a soma $f+g$ e multiplicação $f \cdot g$ de duas funções e a multiplicação $af$ de um escalar $a$ por uma função $f$.

Um conjunto $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f, g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f + g \in A$, $f \cdot g \in A$ e $af \in A$.

## Exemplo

*O conjunto dos polinômios trigonométricos é uma álgebra em $C([a, b], \mathbb{R})$.*

## Definição (Álgebra gerada)

*Se $E \subset C(X, \mathbb{R})$ a interseção de todas as álgebras contendo $E$ é uma álgebra, denotada por $A(E)$, chamada álgebra gerada por $E$.*

## Exemplo

*Os polinômios reais em uma variável real são gerados por $\{1, x\}$.*

É fácil verificar que se $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é uma álgebra então $A^-$ também é uma álgebra (exercício).

**Teorema (Stone-Weierstrass Real)**

*Seja $X$ um espaço métrico compacto e $A \subset C(X, \mathbb{R})$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$ e se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Então, $A = C(X, \mathbb{R})$.*

**Teorema (Stone-Weierstrass Complexo)**

*Seja $X$ um espaço métrico compacto e $A \subset C(X, \mathbb{C})$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$, se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$ e se $\bar{f} \in A$ sempre que $f \in A$. Então, $A = C(X, \mathbb{C})$.*

## Corolário

*Toda função contínua a valores reais ou complexos definida em um conjunto compacto $X$ de $\mathbb{R}^n$ é limite uniforme de uma seqüência de polinômios em n variáveis reais.*

## Corolário

*Se* $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$, *dada uma função contínua* $f : B \to B$ *e* $\epsilon > 0$ *existe* $p : B \to B$ $(p = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *polinômios*) *tal que* $\sup_{x \in B} \|f(x) - p(x)\| < \epsilon$.