Espaços Métricos
O Teorema de Peano, O Lema de Riesz e os Espaços Métricos Separáveis
Aula 26

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

30 de Novembro de 2022

Segundo Semestre de 2022

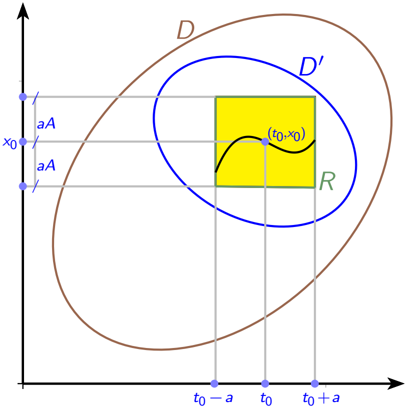
Teorema de Peano

Peano, G.; Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. *Math. Ann.* **37** (1890) (2) 182-228.

Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua.

Teorema (Peano)

Dado $(t_0, x_0) \in D$ a equação diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ tem ao menos uma solução local passando por (t_0, x_0).



Prova: Seja $(t_0,x_0)\in D'\subset D$ aberto tal que f é limitada em D' e seja A tal que $|f(t,x)|\leqslant A$ para todo $(t,x)\in D'$. Seja $a>0$ tal que $R=[t_0-a,t_0+a]\times B_{aA}(x_0)^{-}\subset D'$.

Da continuidade uniforme de f em R, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que,

$(t, x), (t', x') \in R$, $|t - t'| < \delta$ e $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t', x')| < \epsilon$.

Seja $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + a$ uma partição do intervalo $[t_0, t_0 + a]$

tal que $|t_i - t_{i-1}| < \min(\delta, \frac{\delta}{A})$, $1 \leqslant i \leq n$.

Seja $\phi_\epsilon : [t_0, t_0 + a] \to B_{aA}(x_0)^-$ definida por:

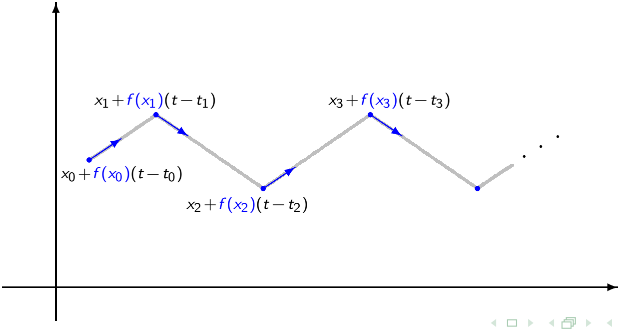
- ϕ_ϵ é contínua,
- $\phi_\epsilon(t_0) = x_0$ e, em $[t_0, t_1]$, linear com direção $f(t_0, x_0)$,
- em $[t_1, t_2]$, seja ϕ_ϵ linear com direção $f(t_1, \phi_\epsilon(t_1))$ e,
- indutivamente, construímos $\phi_\epsilon(t)$ em $B_{aA}(x_0)^-$, $t \in [t_0, t_0 + a]$.

$$\phi_\epsilon(t)=x_0+f(t_0,x_0)(t-t_0),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ x_1=x_0+f(t_0,x_0)(t_1-t_0),$$

$$\phi_\epsilon(t)=x_1+f(t_1,x_1)(t-t_1),\ t_1\leqslant t\leqslant t_2,\ x_2=x_1+f(t_1,x_1)(t_2-t_1),$$

$$\phi_\epsilon(t)=x_2+f(t_2,x_2)(t-t_2),\ t_2\leqslant t\leqslant t_3,\ x_3=x_2+f(t_2,x_2)(t_3-t_2)\cdots$$

$$\phi_\epsilon(t)=\overbrace{x_0+\sum_{j=0}^{i-1}f(t_j,x_j)(t_{j+1}-t_j)}^{x_i}+f(t_i,x_i)(t-t_i),\ t\in[t_i,t_{i+1}]$$



Se $t < t'$, sejam $0 \leqslant i \leqslant i' \leqslant n$ tais que

$$\phi_\epsilon(t') = x_0 + \sum_{j=0}^{i'-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_{i'}, x_{i'})(t' - t_{i'}),\ t' \in [t_{i'}, t_{i'+1}]$$

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_i, x_i)(t - t_i),\ t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ e}$$

$|\phi_\epsilon(t') - \phi_\epsilon(t)| \leqslant A|t - t'|$ e $\displaystyle\max_{t \in [t_0, t_0 + a]} |\phi_\epsilon(t) - x_0| \leqslant aA$, pois

$$|\phi_\epsilon(t') - \phi_\epsilon(t)| = \left| f(t_i, x_i)(t_{i+1} - t) + \sum_{j=i+1}^{i'-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_{i'}, x_{i'})(t' - t_{i'}) \right|$$

Logo, $\{\phi_\epsilon : 0 < \epsilon \leqslant 1\} \subset C([t_0, t_0 + a], B^-_{aA}(x_0))$ é equicontínua e limitada.

Se $\epsilon_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, do Teorema de Arzelá-Ascoli, $\{\phi_{\epsilon_n}\}$ tem subseqüência convergente com limite ϕ em $C([t_0, t_0 + a], B_{aA}(x_0)^-)$.

Provemos que $\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$. Fixado $\epsilon > 0$ e $t \in [t_0, t_0 + a]$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, para algum $0 \leqslant j \leqslant n$. Como $\phi_\epsilon(t) = \phi_\epsilon(t_j) + f(t_j, x_j)(t - t_j)$

$$|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t_j)| < A|t - t_j| < A\frac{\delta}{A} = \delta.$$

Isto implica que

$$|f(t_j, \phi_\epsilon(t_j)) - f(t, \phi_\epsilon(t))| < \epsilon, \quad t_j < t < t_{j+1}.$$

Agora escrevemos

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \overbrace{\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_i, x_i)(t - t_i)}^{\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j}^{t_j+1} f(t_j,\phi_\epsilon(t_j))ds + \int_{t_i}^{t} f(t_i,\phi_\epsilon(t_i))ds}$$

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds + \sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j}^{t_j+1} \underbrace{[f(t_j,\phi_\epsilon(t_j)) - f(s,\phi_\epsilon(s))]}_{\|\cdot\|<\epsilon} ds \tag{1}$$

$$+\int_{t_i}^{t} \underbrace{[f(t_i,\phi_\epsilon(t_i)) - f(s,\phi_\epsilon(s))]}_{\|\cdot\|<\epsilon} ds + \int_{t_0}^{t}[f(s,\phi_\epsilon(s)) - f(s,\phi(s))]ds.$$

Segue de (1) que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

Logo ϕ é uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ passando por (t_0, x_0) e definida em $[t_0, t_0 + a]$. Um argumento semelhante pode ser aplicado para $[t_0 - a, a]$. $\square$

Lema de Riesz

Nesta seção mostraremos que a bola unitária de um espaço vetorial normado X será compacta se, e somente se, X tiver dimensão finita.

Concluiremos, com isto, que todo compacto em um espaço vetorial normado de dimensão infinita terá interior vazio.

Começamos com o seguinte resultado:

Lemma (Lemma de Riesz)

Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ e $\operatorname{dist}(u, M) \geqslant 1 - \epsilon$.

Prova: Sem perda de generalidade podemos supor que $0<\epsilon<1$. Seja $v \in X \backslash M$. Como M é fechado, $\operatorname{dist}(v, M) =: d > 0$. Escolha $m_0 \in M$ tal que $d \leqslant \|v - m_0\| \leqslant \frac{d}{1-\epsilon}$. Seja $u = \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$ e $m \in M$, então $m_0 + \|v - m_0\| m \in M$ e u satisfaz

$$\|u-m\| = \left\| \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|} - m \right\| = \left\| \frac{v-m_0-m\|v-m_0\|}{\|v-m_0\|} \right\| \geqslant \frac{d}{\|v-m_0\|} \geqslant 1-\epsilon. \quad \square$$

Theorem (Riesz)

Se X for um espaço vetorial normado e $\bar{B}_1(0)=\{x\in X : \|x\|\leqslant 1\}$ for compacta então, X terá dimensão finita.

Prova: Suponha que X tenha dimensão infinita. Então existirão subespaços M_n, $n\in\mathbb{N}$, de X tais que $\dim M_n = n$ e $M_n\subset M_{n+1}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Como M_n é fechado, do Lema de Riesz, existirá $u_n\in M_n$, $\|u_n\|=1$, tal que $\operatorname{dist}(u_n, M_{n-1})\geqslant \frac{1}{2}$.

É fácil ver que $\{u_n\}$ não terá subseqüência convergente e $\bar{B}_1(0)$ não será compacta. $\square$

Segue facilmente do Teorema de Riesz que

Corolário

Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Se $K \subset X$ for compacto então, $K^{o} = \varnothing$.

Exemplo

Para espaços ℓ_p o corolário acima é trivial pois podemos exibir explicitamente uma seqüência com as propriedades mencionadas na prova do Teorema de Riesz.

Espaços Métricos Separáveis

Diremos que um espaço métrico (X, ρ) será *separável* se X possuir um subconjunto enumerável denso.

Exemplos:

- Todo espaço métrico totalmente limitado.
- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com as métricas usuais são métricos separáveis.
- Os espaços métricos $(X_1, \rho_1), \cdots, (X_n, \rho_n)$ serão separáveis se, e somente se, $(\prod_{i=1}^{n} X_i, \pi_p)$ for separável
- $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ com as métricas usuais são métricos separáveis.
- $\mathbb{R}^n$ com a métrica discreta não é separável.

Proposição

Se (X, d) é um espaço métrico separável e Y é um subconjunto de X então, (Y, d) é separável.

Prova: Como (X, d) é separável, seja $\{u_m : m \in \mathbb{N}\} \subset X$ denso em X. Se $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (0, \infty)$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, escolha $a_{m,n} \in B_{r_n}(u_m) \cap Y$ quando este conjunto é não vazio. Note que $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_{r_n}(u_m) = X$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Disto segue facilmente que $\{a_{m,n}\}$ é enumerável e denso de Y. $\square$

Vamos mostrar que os espaços ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, são separáveis e que ℓ_∞ não é separável.

Os espaços ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, são separáveis.

Seja $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ com 1 na $k-$ésima posição. Mostremos que o conjunto enumerável $\mathcal{E}$ das combinações lineares finitas com coeficientes racionais de $\{e_1, e_2, \cdots\}$ é denso em ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$.

De fato: Dados $x=\{x_1,x_2,x_3,\cdots\}\in\ell_p$ e $\epsilon>0$, seja $k\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}|x_i|^p<\frac{\epsilon^p}{2}$$

e sejam $r_1,\ldots,r_k$ racionais tais que

$$|x_i-r_i|^p<\frac{\epsilon^p}{2k}.$$

Então para $r=\{r_1,\ldots,r_k,0,0,\ldots\}\in\mathcal{E}$ temos que

$$\rho_p(x,r)^p=\sum_{i=1}^{k}|x_i-r_i|^p+\sum_{i=k+1}^{\infty}|x_i|^p<\epsilon^p.$$

Lema

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se existir uma família $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ tal que

i) $\mathcal{O}_i$ *seja aberto e não vazio em* X, *para todo* $i \in I$,

ii) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \varnothing$, *se* $i \neq j$, *e*

iii) I *não seja enumerável*

então, X *não será separável.*

Prova: Seja $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável de X, como I é não enumerável, existe $i_0 \in I$ tal que $O_{i_0} \cap \{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Segue que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é denso e X não é separável. □

O espaço ℓ_∞ não é separável.

A cada $A \subset \mathbb{N}$ associamos a seqüência $\chi_A = \{x_n\}$ tal que $x_n = 1$ se $n \in A$ e $x_n = 0$ caso contrário.

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todas essas seqüências.

Desta forma $\mathcal{S}$ está em correspondência biunívoca com as partes de $\mathbb{N}$ e portanto $\mathcal{S}$ é um conjunto não enumerável.

Como cada elemento de $\mathcal{S}$ dista, em ℓ_∞, exatamente "um" de qualquer outro elemento de $\mathcal{S}$. Segue que $\{B_{\frac{1}{2}}(\chi_A) \subset \ell^\infty : A \in 2^{\mathbb{N}}\}$ satisfaz as condições do Lema 1 e portanto ℓ_∞ não é separável.

Exercício

Por que razão a construção anterior não funciona em ℓ_p, com $1 \leqslant p < \infty$?

Separabilidade de $\mathbf{C}(\mathbf{K}, \mathbf{M})$

Sejam (K, d_K) e (M, d_M) espaços métricos.

Daremos condições suficientes para que o espaço $C(K, M)$, com a métrica da convergência uniforme, seja separável.

A seguir recordaremos a noção de *número de Lebesgue*.

Definição

Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de um espaço métrico (X, d). Diremos que um número $\eta > 0$ será um número de Lebesgue *de $\mathcal{U}$ se todo subconjunto de X com diâmetro menor que η estiver contido em algum $U \in \mathcal{U}$.*

Proposição

Se (X, d) for métrico compacto, então toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de (X, d) terá um número de Lebesgue.

Recordação da Prova:

Faremos a prova por redução ao absurdo. Suponha que $\mathcal{U}$ seja uma cobertura aberta do espaço métrico compacto (X, d) que não possua um número de Lebesgue.

Então, dados $n \in \mathbb{N}^*$ subconjunto O_n de X com $\mathrm{diam}(O_n) < \frac{1}{n}$, tal que O_n não está contido em qualquer dos elementos de $\mathcal{U}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ escolha $x_n \in O_n$.

Passando para uma subseqüência, podemos assumir que $\{x_n\}$ seja convergente, com limite $x \in X$.

Assim, $x \in U_x$ para algum $U_x \in \mathcal{U}$. Consequentemente, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^X(x) \subset U_x$.

Como $\mathrm{diam}(O_n) < \frac{1}{n}$, $x_n \in O_n$ e $x_n \to x$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $O_n \subset B_\epsilon(x)$, para todo $n \geq N$.

Logo, $O_n \subset U_x \in \mathcal{U}$, para todo $n \geq N$, o que é um absurdo. $\square$

Teorema

Sejam (K, d_K) e (M, d_M) espaços métricos. Se K for compacto e M for separável, então $C(K, M)$, com a métrica da convergência uniforme, será separável.

Estragégia da prova

Seja $\{u_\ell : \ell \in \mathbb{N}^*\}$ um subconjunto enumerável denso de M e $\mathcal{U} = \{B_{\frac{1}{k}}(u_\ell) : k, \ell \in \mathbb{N}^*\}$. Reescrevemos $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Como K é compacto, dado $n \in \mathbb{N}^*$, fixe $p_n \in \mathbb{N}$ e compactos $\{K_i^n : 1 \leqslant i \leqslant p_n\}$ com diâmetro menor que n^{-1} de forma que $K = \bigcup_{i=1}^{p_n} K_i^n$.

Estragégia da prova

Dado $n \in \mathbb{N}^*$ e p_n como acima, seja $\sigma_{p_n} = \{U_1^n, \cdots, U_{p_n}^n\}$ uma coleção qualquer com p_n elementos de $\mathcal{U}$.

Indiquemos por $A(n, \sigma_{p_n})$ o conjunto das $f \in C(K, M)$ tais que $f(K_i^n) \subset U_i^n$, para todo $1 \leqslant i \leqslant p_n$.

Estragégia da prova

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $\mathcal{F}_n = \{A(n, \sigma_{p_n}) : \sigma_{p_n} \subset \mathcal{U}$ com p_n elementos$\}$.

$\mathcal{F}_n$ é enumerável, pois $\mathcal{U}$ é enumerável, e $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ é enumerável

Mostraremos que, dados $f \in C(K, M)$ e $\epsilon > 0$, $f \in A(n, \sigma_{p_n}) \subset \bar{B}_\epsilon(f)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$ e $\sigma_{p_n} \subset \mathcal{U}$, com p_n elementos. O resultado seguirá tomando uma função em cada um dos elementos de $\mathcal{F}$.

Observação

Os $A(n, \sigma_{p_n})$ são abertos de $C(K, M)$. De fato, se $f \in A(n, \sigma_{p_n})$ e $\epsilon = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p_n} d_M(f(K_i^n), (U_i^n)^c)$ e $d(g, f) < \epsilon$, então $g \in A(n, \sigma_{p_n})$.

Prova:

Mostremos que para cada $f \in C(K, M)$ e $\epsilon > 0$ existem $n \in \mathbb{N}^*$ e $\sigma_{p_n} \subset \mathcal{U}$, com p_n elementos, tais que $f \in A(n, \sigma_{p_n}) \subset \bar{B}_\epsilon(f)$.

Basta encontrar $n \in \mathbb{N}^*$ e $\sigma_{p_n} \subset \mathcal{U}$, com p_n elementos, tais que $f \in A(n, \sigma_{p_n})$ e $\operatorname{diam}(A(n, \sigma_{p_n})) \leqslant \epsilon$.

Como $f(K)$ é compacto existem $U_j^{p'} \in \mathcal{U}$, $1 \leqslant j \leqslant p'$, com $\mathrm{diam}(U_j^{p'}) < \epsilon$ e $f(K) \subset \bigcup_{j=1}^{p'} U_j^{p'}$. Seja $\eta > 0$ um número de Lebesgue dessa cobertura e, da continuidade uniforme, $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathrm{diam}(f(K_i^n)) < \eta$, $1 \leqslant i \leqslant p_n$.

Logo podemos escolher, entre os abertos $U_j^{p'}$, $1 \leqslant j \leqslant p'$, abertos U_i^n tais que $f(K_i^n) \subset U_i^n$, $1 \leqslant i \leqslant p_n$. Isto define $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma_{p_n} = \{U_1^n, \cdots, U_{p_n}^n\}$ com $f \in A(n, \sigma_{p_n})$.

Se $g, h \in A(n, \sigma_{p_n})$ e $x \in K$, então $x \in K_i^n$, para algum $1 \leqslant i \leqslant p_n$.

Logo $g(x), h(x) \in U_i^n$ e, consequentemente, $d_M(g(x), h(x)) < \epsilon$.

Assim, $\max_{x \in K} d_M(g(x), h(x)) < \epsilon$ e $\operatorname{diam}(A(n, \sigma_{p_n})) \leqslant \epsilon$, concluindo

a demonstração do teorema. $\square$

Corolário

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então $C(\overline{\Omega}) =: C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ é separável.