Espaços Métricos
Espaços Métricos Separáveis
O Teorema de Stone-Weierstrass
Aula 26

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

09 de Dezembro de 2020

Segundo Semestre de 2020

O Teorema de Stone-Weierstrass

Seja (X,ρ) um espaço métrico compacto e $C(X,\mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a métrica usual

$$\rho_\infty(f,g) = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X,\mathbb{R})$ definimos a soma $f+g$ e a multiplicação $f\cdot g$ de duas funções além da multiplicação af de um escalar a por uma função f de forma usual.

Um conjunto $A \subset C(X,\mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f,g \in A$, $a\in\mathbb{R}$ implica $f+g\in A$, $f\cdot g \in A$ e $af \in A$.

É fácil verificar que se $A \subset C(X, \mathbb{R})$ é uma álgebra então A^- também é uma álgebra (exercício).

Teorema (Stone-Weierstrass Real)

Seja X um espaço métrico compacto e $A \subset C(X, \mathbb{R})$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$ e se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Então, $A = C(X, \mathbb{R})$.

Prova: Primeiramente mostraremos que, se $f \in A$, então $|f| \in A$.

De fato: Se $\max_{x\in X}|f(x)| < M$, $\epsilon > 0$, $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ for um polinômio (do Teorema de Aproximação de Weierstrass) tal que

$$||t| - p(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [-M, M],$$

e $p(f) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n$, então $p(f) \in A$ e

$$||f(x)| - p(f(x))| < \epsilon, \quad x \in X.$$

Segue do fato que A é fechada em $C(X, \mathbb{R})$ que $|f| \in A$.

A seguir mostremos que se $h, g \in A$ então $\max\{h, g\} \in A$ e $\min\{h, g\} \in A$. Isto segue do fato que

$$\min\{h, g\} = \frac{1}{2}(h + g) - \frac{1}{2}|h - g| \in A \quad \text{e}$$

$$\max\{h, g\} = \frac{1}{2}(h + g) + \frac{1}{2}|h - g| \in A.$$

Seja $x, y \in X$ com $x \neq y$ e $f \in C(X, \mathbb{R})$. A função constante g^x com valor $f(x)$ está em A (aqui usamos que $1 \in A$).

Seja $h^y \in A$ tal que $h^y(x) \neq h^y(y)$. Sem perda de generalidade assumimos $h^y(x) = 0$ (aqui usamos novamente que $1 \in A$).

Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{xy} = g^x + ah^y \in A$$

satisfaz $f_{xy}(x) = f(x)$ e $f_{xy}(y) = f(y)$.

Seja $\epsilon > 0$, para cada $y \in X$ existe uma bola aberta B_y tal que $y \in B_y$ e $f_{xy}(z) < f(z) + \epsilon$, $\forall z \in B_y$.

Como X é compacto temos que $B_{y_1}, \ldots, B_{y_n}$ cobrem X para alguma escolha de $y_1, \ldots, y_n$. Seja

$$f_x = \min\{f_{xy_1}, \ldots, f_{xy_n}\}.$$

Então $f_x \in A$, $f_x(x) = f(x)$ e para $z \in X$, $f_x(z) < f(z) + \epsilon$. Agora, para $x \in X$, existe uma bola aberta B_x tal que, $\forall z \in B_x$

$$f_x(z) > f(z) - \epsilon.$$

Como X é compacto, um número finito dessas bolas $B_{x_1}, \ldots, B_{x_n}$ cobrem X. Seja

$$F = \max\{f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}\}.$$

Então $F \in A$ e $\forall z \in X$,

$$|f(z) - F(z)| < \epsilon$$

o que prova o teorema. $\square$

Teorema (Stone-Weierstrass Complexo)

Seja X um espaço métrico compacto e $A \subset C(X, \mathbb{C})$ uma álgebra fechada tal que $1 \in A$, se $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$ e se $\bar{f} \in A$ sempre que $f \in A$. Então, $A = C(X, \mathbb{C})$.

Prova: Como, para toda $f \in A$, as funções

$$\mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \text{ e } \mathrm{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$$

pertencem a A, o subconjunto A_0 de A das funções contínuas em X com valores reais é $C(X, \mathbb{R})$. O restante da prova é imediata. $\square$

Corolário

Toda função contínua a valores reais ou complexos definida em um conjunto compacto X de $\mathbb{R}^n$ é limite uniforme de uma seqüência de polinômios em n variáveis reais.

Corolário

Se $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$*, dada uma função contínua* $f : B \to B$ *e* $\epsilon > 0$ *existe* $p : B \to B$ $(p = (p_1, \dots, p_n)$*,* p_i*,* $1 \leqslant i \leqslant n$*, polinômios)* *tal que* $\sup_{x \in B} \|f(x) - p(x)\| < \epsilon$.

Prova: Sabemos que, dado $\epsilon > 0$,

$$\|(1 - \frac{\epsilon}{2})f(x)\| \leqslant 1 - \frac{\epsilon}{2}, \ \forall x \in B.$$

Do Corolário 1, existem polinômios p_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, tais que

$$|p_i(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2})f_i(x)|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{4n}, \ \forall x \in B.$$

Se $p = (p_1, \ldots, p_n)$ temos que $\sup_{x \in B} \|p(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2}) f(x)\| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

Segue que

$$\|p(x)\| \leqslant \|p(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2}) f(x)\| + \|(1 - \frac{\epsilon}{2}) f(x)\|$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2} + (1 - \frac{\epsilon}{2}) = 1, \ \forall x \in B$$

e que

$$\|p(x) - f(x)\| \leqslant \|p(x) - (1 - \frac{\epsilon}{2}) f(x)\| + \|(1 - \frac{\epsilon}{2}) f(x) - f(x)\|$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \ \forall x \in B. \ \square$$