Espaços Métricos
Espaços Métricos Compactos
Teorema Arzelá-Ascoli
Aula 25

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

28 de Novembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Terminologia para o Teorema de Arzelá-Ascoli

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. O espaço métrico das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ com a métrica

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

é um espaço métrico completo que denotamos por $C(X, \mathbb{R})$.

Definição (Famílias Uniformemente Limitadas)

Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções será dita **uniformemente limitada** *se for limitada em $C(X, \mathbb{R})$, isto é, se existir $M > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

Definição (Famílias Equicontínuas)

Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções em $C(X, \mathbb{R})$ será chamada **equicontínua** *se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que,*

$$f \in \mathcal{F},\ x, x' \in X,\ \rho(x', x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Exemplo

- *Uma coleção finita em $C(X,\mathbb{R})$ será* **equicontínua**
- *Se $L>0$, f será Lipschitz com constante L se, e somente se, $|f(x)-f(y)| \leqslant L\,\rho(x,y)$, para todo $x,y\in X$. Se*

$$\mathcal{F}_L = \{f \in C(X,\mathbb{R}) : f \text{ é Lipschitz com constante } L\}$$

então, $\mathcal{F}_L$ é uma família equicontínua e fechada de $C(X,\mathbb{R})$.

Teorema de Arzelá-Ascoli

Teorema (Arzelá-Ascoli)

Se (X,ρ) for compacto, $\mathcal{F} \subset C(X,\mathbb{R})$ será relativamente compacto se, e somente se, for uniformemente limitada e equicontínua.

Arzelà, Cesare. Note on series of analytic functions. *Ann. of Math.* **5** (2) (1904) 51-63.

Prova: Se $\mathcal{F}$ for relativamente compacto, $\mathcal{F}$ será totalmente limitado e portanto limitado em $C(X,\mathbb{R})$.

Dado $\epsilon > 0$ sejam $f_1, \cdots, f_n$ tais que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_i)$. Se $f \in \mathcal{F}$, $x, x' \in X$ e $1 \leqslant i \leqslant n$, temos

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')|.$$

Escolha $1 \leqslant j \leqslant n$ tal que

$$\max_{x \in X} |f(x) - f_j(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então

$$|f(x) - f(x')| \leqslant \frac{2\epsilon}{3} + |f_j(x) - f_j(x')|.$$

Como X é compacto, $f_1, \cdots, f_n$ são uniformemente contínuas.

Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implica

$$|f_i(x) - f_i(x')| < \frac{\epsilon}{3}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Segue que se $\rho(x, x') < \delta$ então,

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

e $\mathcal{F}$ é equicontínuo.

Reciprocamente, se $\mathcal{F}$ for uniformemente limitado e equicontínuo.

Seja $\epsilon > 0$ e M um inteiro positivo tal que

$$|f(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}$$

Escolha $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{4}$, $\forall f \in \mathcal{F}$.

Como X é compacto existem $x_1, \cdots, x_n$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\delta(x_i)$.

Escolha um número inteiro positivo m tal que $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{4}$ e divida

$[-M, M]$ em $2Mm$ intevalos comprimento $\frac{1}{m}$ pelos pontos

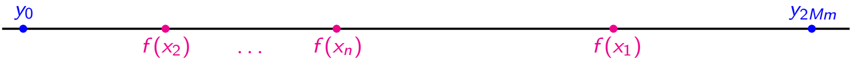
$$y_0 = -M < \cdots < y_i := -M + \frac{i}{m} < \cdots < y_{2Mm} = M, \ \ 0 \leqslant i \leqslant 2Mm.$$

Dada uma função $f \in \mathcal{F}$, recorde que $f(x) \in [y_0, y_{2Mm}]$.

Calculamos os seus valores nos pontos x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

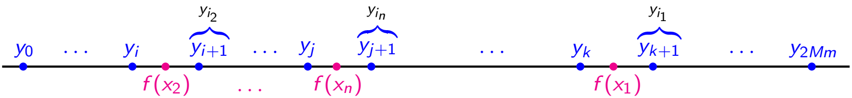
Dada uma função $f \in \mathcal{F}$, recorde que $f(x) \in [y_0, y_{2Mm}]$.

Calculamos os seus valores nos pontos x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.



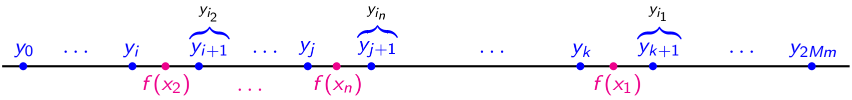
Dada uma função $f \in \mathcal{F}$, recorde que $f(x) \in [y_0, y_{2Mm}]$.

Calculamos os seus valores nos pontos x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.



Dada uma função $f \in \mathcal{F}$, recorde que $f(x) \in [y_0, y_{2Mm}]$.

Calculamos os seus valores nos pontos x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.



Considere as n-uplas $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ de números $y_i, 1 \leqslant i \leqslant 2Mm$,

tais que para algum $f \in \mathcal{F}$

$$|f(x_j) - \tilde{y}_j| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

e escolha um tal $f \in \mathcal{F}$ para cada $n-$upla.

Se $\mathcal{E}$ é o conjunto resultante dessa escolha, $\mathcal{E}$ é finito.

Mostremos que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{f \in \mathcal{E}} B_\epsilon(f)$.

Se $f \in \mathcal{F}$ escolhemos $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ de números $y_i, 1 \leqslant i \leqslant 2Mm$ tal que

$$|f(x_j) - \tilde{y}_j| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

e seja $e \in \mathcal{E}$ tal que

$$|e(x_j) - \tilde{y}_j| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Seja $x \in X$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ tal que $\rho(x, x_j) < \delta$. Então

$$|f(x)-e(x)| \leqslant |f(x)-f(x_j)|+|f(x_j)-\tilde{y}_j|+|\tilde{y}_j-e(x_j)|+|e(x_j)-e(x)|$$

$$<\epsilon.$$

Logo

$$\max_{x\in X}|f(x)-e(x)| < \epsilon.$$

e $\mathcal{F}$ será totalmente limitado. $\square$

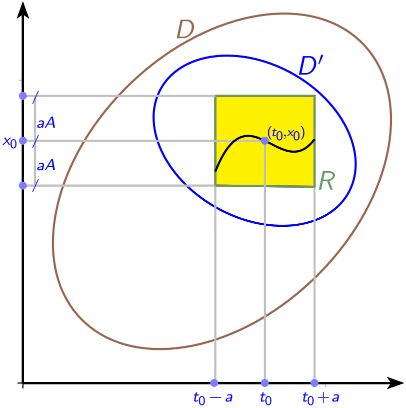
Teorema de Peano

Peano, G.; Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. *Math. Ann.* **37** (1890) (2) 182-228.

Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua.

Teorema (Peano)

Dado $(t_0, x_0) \in D$ a equação diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ tem ao menos uma solução local passando por (t_0, x_0).



Prova: Seja $(t_0, x_0) \in D' \subset D$ aberto tal que f é limitada em D' e seja A tal que $|f(t,x)| \leqslant A$ para todo $(t,x) \in D'$. Seja $a > 0$ tal que $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_{aA}(x_0)^{-} \subset D'$.

Da continuidade uniforme de f em R, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que,

$(t, x), (t', x') \in R$, $|t - t'| < \delta$ e $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t', x')| < \epsilon$.

Seja $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + a$ uma partição do intervalo $[t_0, t_0 + a]$

tal que $|t_i - t_{i-1}| < \min(\delta, \frac{\delta}{A})$, $1 \leqslant i \leq n$.

Seja $\phi_\epsilon : [t_0, t_0 + a] \to B_{aA}(x_0)^-$ definida por:

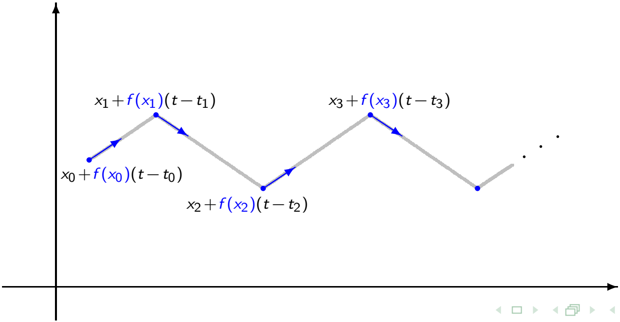
- ϕ_ϵ é contínua,
- $\phi_\epsilon(t_0) = x_0$ e, em $[t_0, t_1]$, linear com direção $f(t_0, x_0)$,
- em $[t_1, t_2]$, seja ϕ_ϵ linear com direção $f(t_1, \phi_\epsilon(t_1))$ e,
- indutivamente, construímos $\phi_\epsilon(t)$ em $B_{aA}(x_0)^-$, $t \in [t_0, t_0 + a]$.

$$\phi_\epsilon(t)=x_0+f(t_0,x_0)(t-t_0),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ x_1=x_0+f(t_0,x_0)(t_1-t_0),$$

$$\phi_\epsilon(t)=x_1+f(t_1,x_1)(t-t_1),\ t_1\leqslant t\leqslant t_2,\ x_2=x_1+f(t_1,x_1)(t_2-t_1),$$

$$\phi_\epsilon(t)=x_2+f(t_2,x_2)(t-t_2),\ t_2\leqslant t\leqslant t_3,\ x_3=x_2+f(t_2,x_2)(t_3-t_2)\cdots$$

$$\phi_\epsilon(t)=\overbrace{x_0+\sum_{j=0}^{i-1}f(t_j,x_j)(t_{j+1}-t_j)}^{x_i}+f(t_i,x_i)(t-t_i),\ t\in[t_i,t_{i+1}]$$



Se $t < t'$, sejam $0 \leqslant i \leqslant i' \leqslant n$ tais que

$$\phi_\epsilon(t') = x_0 + \sum_{j=0}^{i'-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_{i'}, x_{i'})(t' - t_{i'}),\ t' \in [t_{i'}, t_{i'+1}]$$

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_i, x_i)(t - t_i),\ t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ e}$$

$|\phi_\epsilon(t') - \phi_\epsilon(t)| \leqslant A|t - t'|$ e $\max_{t \in [t_0, t_0 + a]} |\phi_\epsilon(t) - x_0| \leqslant aA$, pois

$$|\phi_\epsilon(t') - \phi_\epsilon(t)| = \left| f(t_i, x_i)(t_{i+1} - t) + \sum_{j=i+1}^{i'-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_{i'}, x_{i'})(t' - t_{i'}) \right|$$

Logo, $\{\phi_\epsilon : 0 < \epsilon \leqslant 1\} \subset C([t_0, t_0 + a], B^-_{aA}(x_0))$ é equicontínua e limitada.

Se $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, do Teorema de Arzelá-Ascoli, $\{\phi_{\epsilon_n}\}$ tem subseqüência convergente com limite ϕ em $C([t_0, t_0 + a], B_{aA}(x_0)^-)$.

Provemos que $\phi(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$. Fixado $\epsilon > 0$ e $t \in [t_0, t_0 + a]$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, para algum $0 \leqslant j \leqslant n$. Como $\phi_\epsilon(t) = \phi_\epsilon(t_j) + f(t_j, x_j)(t - t_j)$

$$|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t_j)| < A|t - t_j| < A\frac{\delta}{A} = \delta.$$

Isto implica que

$$|f(t_j, \phi_\epsilon(t_j)) - f(t, \phi_\epsilon(t))| < \epsilon, \quad t_j < t < t_{j+1}.$$

Agora escrevemos

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \overbrace{\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_i, x_i)(t - t_i)}^{\sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j}^{t_j+1} f(t_j,\phi_\epsilon(t_j))ds + \int_{t_i}^{t} f(t_i,\phi_\epsilon(t_i))ds}$$

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds + \sum_{j=0}^{i-1}\int_{t_j}^{t_j+1} \underbrace{[f(t_j,\phi_\epsilon(t_j)) - f(s,\phi_\epsilon(s))]}_{\|\cdot\|<\epsilon} ds \tag{1}$$

$$+ \int_{t_i}^{t} \underbrace{[f(t_i,\phi_\epsilon(t_i)) - f(s,\phi_\epsilon(s))]}_{\|\cdot\|<\epsilon} ds + \int_{t_0}^{t} [f(s,\phi_\epsilon(s)) - f(s,\phi(s))]ds.$$

Segue de (1) que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

Logo ϕ é uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ passando por (t_0, x_0) e definida em $[t_0, t_0 + a]$. Um argumento semelhante pode ser aplicado para $[t_0 - a, a]$. $\square$

Lema de Riesz

Nesta seção mostraremos que a bola unitária de um espaço vetorial normado X será compacta se, e somente se, X tiver dimensão finita.

Concluiremos, com isto, que todo compacto em um espaço vetorial normado de dimensão infinita terá interior vazio.

Começamos com o seguinte resultado:

Lemma (Lemma de Riesz)

Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ e $\operatorname{dist}(u, M) \geqslant 1 - \epsilon$.

Prova: Sem perda de generalidade podemos supor que $0<\epsilon<1$. Seja $v \in X \backslash M$. Como M é fechado, $\operatorname{dist}(v, M) =: d > 0$. Escolha $m_0 \in M$ tal que $d \leqslant \|v - m_0\| \leqslant \frac{d}{1-\epsilon}$. Seja $u = \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$ e $m \in M$, então $m_0 + \|v - m_0\| m \in M$ e u satisfaz

$$\|u-m\| = \left\| \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|} - m \right\| = \left\| \frac{v - m_0 - m\|v-m_0\|}{\|v - m_0\|} \right\| \geqslant \frac{d}{\|v-m_0\|} \geqslant 1-\epsilon. \quad \square$$

Theorem (Riesz)

Se X for um espaço vetorial normado e $\bar{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ for compacta então, X terá dimensão finita.

Prova: Suponha que X tenha dimensão infinita. Então existirão subespaços M_n, $n \in \mathbb{N}$, de X tais que $\dim M_n = n$ e $M_n \subset M_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M_n é fechado, do Lema de Riesz, existirá $u_n \in M_n$, $\|u_n\| = 1$, tal que $\operatorname{dist}(u_n, M_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$.

É fácil ver que $\{u_n\}$ não terá subseqüência convergente e $\bar{B}_1(0)$ não será compacta. $\square$

Segue facilmente do Teorema de Riesz que

Corolário

Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Se $K \subset X$ for compacto então, $K^{o} = \varnothing$.

Exemplo

Para espaços ℓ_p o corolário acima é trivial pois podemos exibir explicitamente uma seqüência com as propriedades mencionadas na prova do Teorema de Riesz.