Espaços Métricos
Espaços Métricos Separáveis
O Teorema de Aproximação de Weierstrass
Aula 25

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

07 de Dezembro de 2020

Segundo Semestre de 2020

O Teorema de Aproximação de Weierstrass

Vimos que, se (K, d_K) e (M, d_M) forem espaços métricos, K for compacto e M for separável, então $C(K, M)$ será separável.

No caso particular $K = [a, b]$ e $M = \mathbb{R}$, a prova da separabilidade de $C([a, b], \mathbb{R})$ também pode ser feita utilizando o Teorema de Aproximação de Weierstrass que apresentamos a seguir.

Teorema (de Aproximação de Weierstrass)

Dados $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ *e* $\epsilon > 0$, *existe um polinômio* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tal que* $\|p - f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

Prova: Faremos a prova para $a = 0$ e $b = 1$. O caso geral será deixado como exercício.

Seja $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e os polinômios de Bernstein

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

associados a f. Note que se $f \equiv 1$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1. \tag{1}$$

Derivando a identidade anterior, obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^{k}(1-x)^{n-k-1}]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k(1-x) - (n-k)x]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx) = 0.$$

Multiplicando por $x(1-x)$ obtemos que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k}(1-x)^{n-k}(k-nx) = 0.$$

Derivando novamente e multiplicando por $x(1-x)$ e usando (1)

$$-nx(1-x)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)^2=0. \qquad (2)$$

Dividindo esta última expressão por n^2 obtemos

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2=\frac{x(1-x)}{n}. \qquad (3)$$

É claro que

$$|f(x)-B_n(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

Como f é uniformemente contínua em $[0, 1]$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x - \frac{k}{n}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\frac{k}{n})| < \epsilon/2$.

Agora, para qualquer $x \in [0, 1]$ fixo, separamos a soma do lado direito em duas partes, denotadas por Σ e Σ', onde

- Σ é a soma dos termos para os quais $|x - \frac{k}{n}| < \delta$ e
- Σ' é a soma dos termos remanescentes.

É claro que $\Sigma < \epsilon/2$. Provaremos que, para n suficientemente grande e independentemente de x, $\Sigma' < \epsilon/2$.

Como f é limitada existe $K > 0$ tal que $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| \leqslant K$. Segue que

$$\sum{}' \leqslant 2K \sum_{\substack{1 \leqslant k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 2K \sum{}''.$$

De (3) obtemos que

$$\frac{\delta^2}{2K} \sum{}' \leqslant \delta^2 \sum{}'' \leqslant \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Isto prova o resultado. $\square$

Corolário

$C([a,b],\mathbb{R})$ é separável.

Observação

Para $C([a,b],\mathbb{R})$ com a norma $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ mostramos que

- *$C([a,b],\mathbb{R})$ é um espaço de Banach de dimensão infinita.*
- *As funções de $C([a,b],\mathbb{R})$ são uniformemente contínuas.*
- *Os compactos de $C([a,b],\mathbb{R})$ tem interior vazio.*
- *Os compactos de $C([a,b],\mathbb{R})$ são, exatamente, os conjuntos fechados, limitados e equicontínuos em $C([a,b],\mathbb{R})$.*
- *$C([a,b],\mathbb{R})$ é separável e o subespaço $P([a,b],\mathbb{R})$ formado por todos os polinômios é denso em $C([a,b],\mathbb{R})$.*

Observação

O Espaço $C_c((0,1),\mathbb{R})$ das funções de $C([a,b],\mathbb{R})$ tais que

$$\mathrm{supp}(f) = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}^- \subset (0,1),$$

é denso em $C_0([0,1],\mathbb{R}) = \{f \in C([a,b],\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$.

De fato: Dado $\epsilon > 0$ e $f \in C_0([0,1],\mathbb{R})$, seja $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $|f(x)| < \epsilon$, sempre que $x \in [0,\delta] \cup [1-\delta, 1]$.

Se $h \in C_c((0,1),[0,1])$ for tal que $h \equiv 1$ em $[\delta, 1-\delta]$, então

$$f_\epsilon = h \cdot f \in C_c((0,1),\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \max_{x \in [0,1]} |f(x) - f_\epsilon(x)| < \epsilon.$$

Seja (X,ρ) um espaço métrico compacto e $C(X,\mathbb{R})$ os espaço das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$ com a métrica usual, isto é,

$$\rho(f,g) = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Em $C(X,\mathbb{R})$ definimos a soma $f+g$ e multiplicação $f\cdot g$ de duas funções além da multiplicação af de um escalar a por uma função f de forma usual.

Um conjunto $A \subset C(X,\mathbb{R})$ é dito uma álgebra se $f,g \in A$, $a \in \mathbb{R}$ implica $f+g \in A$, $f\cdot g \in A$ e $af \in A$.

Exemplo

O conjunto dos polinômios trigonométricos é uma álgebra em $C([a,b],\mathbb{R})$.

Definição (Álgebra gerada)

Se $E \subset C(X,\mathbb{R})$ a interseção de todas as álgebras contendo E é uma álgebra, denotada por $A(E)$, chamada álgebra gerada por E.

Exemplo

Os polinômios reais em uma variável real são gerados por $\{1,x\}$.