Espaços Métricos
Espaços Métricos Compactos
Dimensão Topológica e o Teorema de Imersão
Aula 24

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

28 de Novembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Dimensão Topológica

Definição (Dimensão Topológica)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Diremos que X terá **dimensão topológica** *finita se, e somente se,*

- *existir um natural m tal que, qualquer cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tenha um refinamento $\mathcal{U}'$ para o qual, cada ponto de X pertença a no máximo $m+1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$.*

Neste caso, diremos que $\mathcal{U}'$ tem ordem $m+1$. A **dimensão topológica** $\dim(X)$ *de X será o* **menor** *m com esta propriedade.*

J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Pearson (2000) [C.8].

Definição

Diremos que o conjunto $\{z_0, \cdots, z_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ será geometricamente independente se, e somente se, $\sum_{i=0}^{k} a_i z_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ implicar $a_i = 0$, $0 \leqslant i \leqslant k$.

É claro que $\{z_0, \cdots, z_k\}$ será geometricamente independente se, e somente se, $\{z_1 - z_0, \cdots, z_k - z_0\}$ for linearmente independente.

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ de pontos estará em posição geral em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, todo subconjunto de A com $n+1$, ou menos, pontos de A for geométricamente independente.

Figure: Construção de conjunto em posição geral

Figure: Construção de conjunto em posição geral

Figure: Construção de conjunto em posição geral

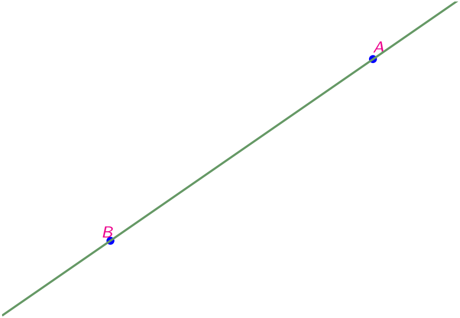


Figure: Construção de conjunto em posição geral

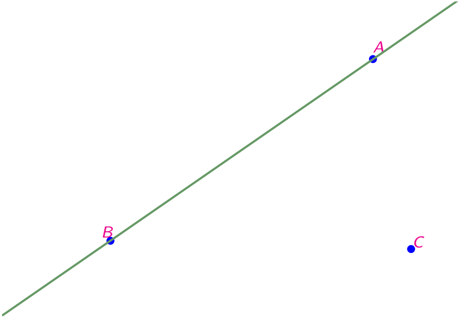


Figure: Construção de conjunto em posição geral

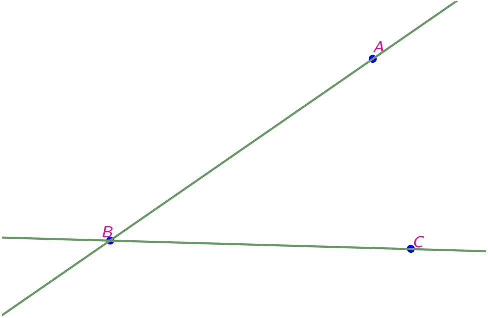


Figure: Construção de conjunto em posição geral

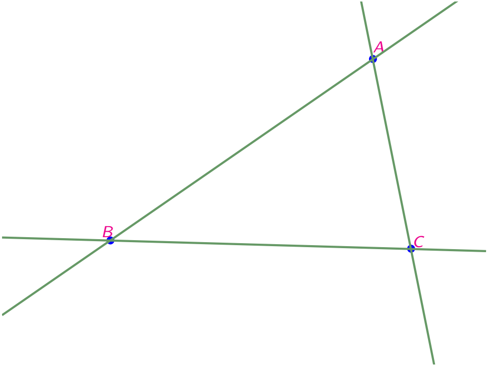


Figure: Construção de conjunto em posição geral

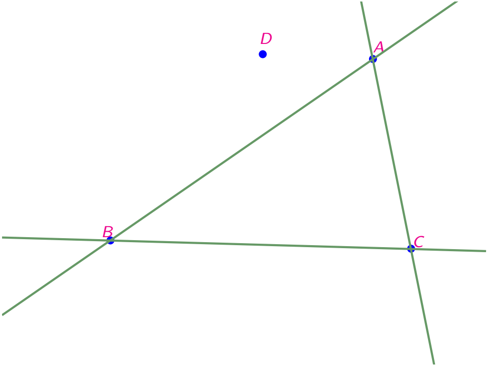


Figure: Construção de conjunto em posição geral

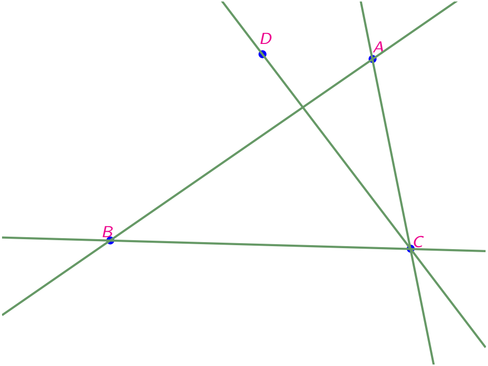


Figure: Construção de conjunto em posição geral

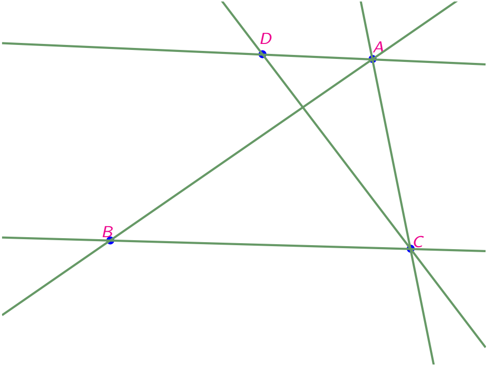
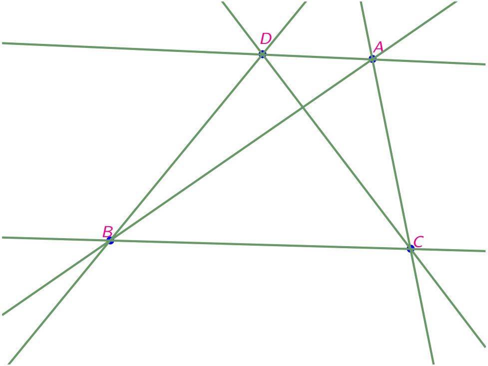


Figure: Construção de conjunto em posição geral



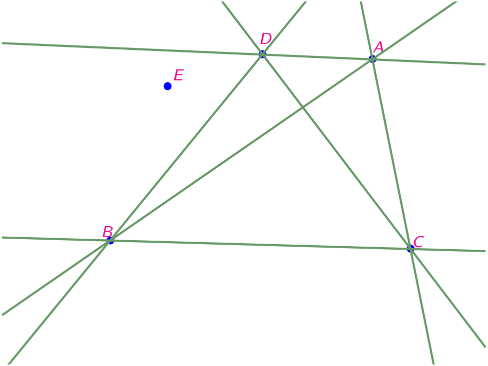


Figure: Construção de conjunto em posição geral

Figure: Construção de conjunto em posição geral

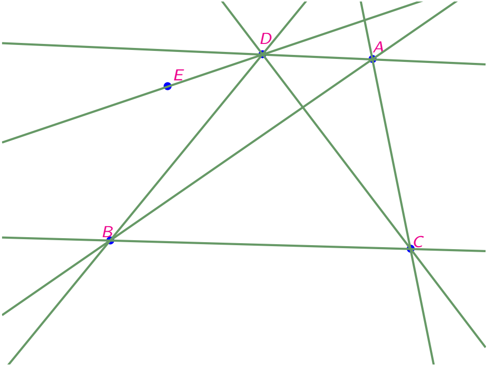


Figure: Construção de conjunto em posição geral

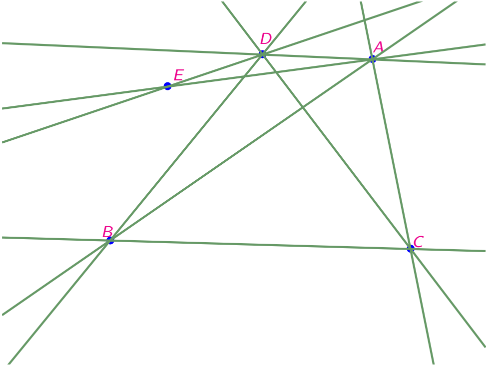


Figure: Construção de conjunto em posição geral

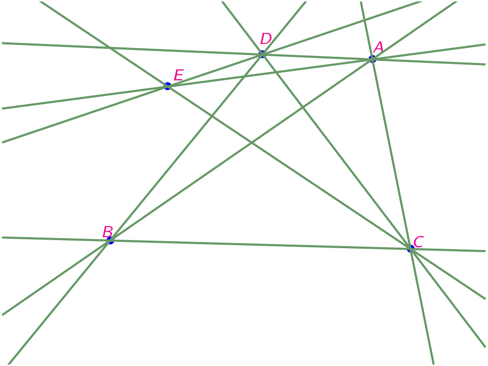


Figure: Construção de conjunto em posição geral

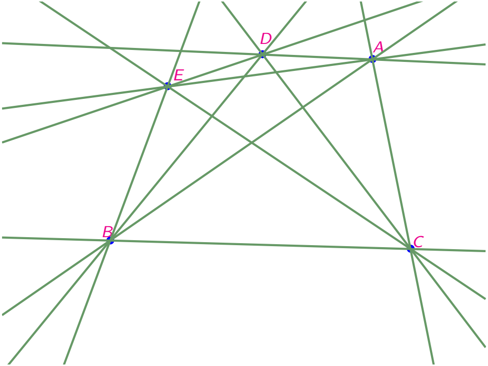
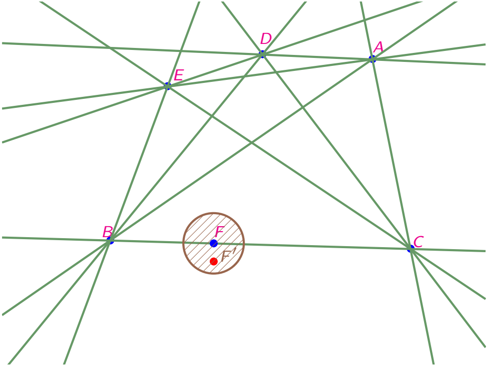


Figure: Construção de conjunto em posição geral



- $\{A,B,C,D,E,F\}$ não estão em posição geral.
- Podemos escolher F' arbitrariamente próximo a F de modo que $\{A,B,C,D,E,F'\}$ estejam em posição geral.

Teorema

Dado um conjunto finito $\{z_1, \cdots, z_\ell\}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$ existe um conjunto $\{y_1, \cdots, y_\ell\}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão em posição geral em $\mathbb{R}^n$ e tal que $\|z_i - y_i\|_\infty < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Teorema (de Imersão)

Todo espaço métrico compacto de dimensão topológica m é homeomorfo a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{2m+1}$

Estratégia da prova: Dada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ **[completo]** defina

$$\Delta(f) = \max_{z \in f(X)} \operatorname{diam}(f^{-1}(z)).$$

Note que, $\Delta(f) = 0$ se, e somente se, f é injetiva.

Observação: $\Delta(f)$ é uma medida do quanto f deixa de ser injetiva.

Dado $\epsilon > 0$, defina $U_\epsilon = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty) : \Delta(f) < \epsilon\}$. Mostraremos

que U_ϵ é aberto e denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$. Do **Teorema de Baire**,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$$

será denso um em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ de funções injetivas.

Como X é compacto, X será homeomorfo a um compacto de $\mathbb{R}^N_\infty$.

Mostremos que U_ϵ é aberto em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$.

Dado $f \in U_\epsilon$ escolha $b \in (\Delta(f), \epsilon)$.

Note que, se $f(x) = f(y) = z$, então $\{x, y\} \subset f^{-1}(z)$ e $d(x, y) < b$.

Se $F = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \geq b\}$ então, F é compacto e

$X \times X \ni (x, y) \mapsto \|f(x) - f(y)\|_\infty \in \mathbb{R}^+$ é positiva em F.

Seja $\delta = \frac{1}{2} \min\{\|f(x) - f(y)\|_\infty : (x, y) \in F\}$.

Se $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$, $\max\limits_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \delta$, para $(x, y) \in F$ temos

$\|f(x) - f(y)\|_\infty \geq 2\delta$ e $\|g(x) - g(y)\|_\infty > 0$.

Logo, $g(x) = g(y)$ implica que $d(x, y) < b$ e portanto $\Delta(g) \leqslant b < \epsilon$.

Segue que $g \in U_\epsilon$ e U_ϵ é aberto.

Mostremos que U_ϵ é denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$.

Seja $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ e $\epsilon > 0$ fixo.

Dado $\delta > 0$, mostremos $\max_{x \in X} \| f(x) - g(x) \|_\infty < \delta$, para algum $g \in U_\epsilon$.

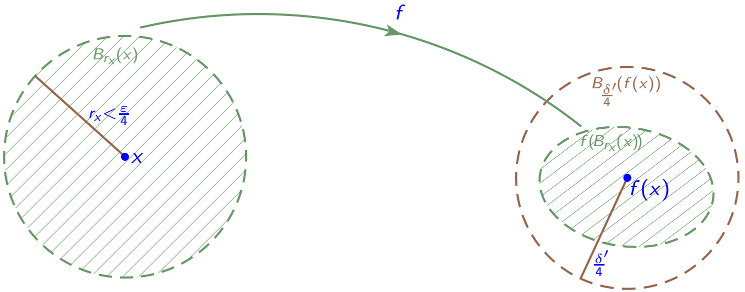
Contrução da cobertura de X:

Fixe $\epsilon > 0$. Dado $\delta > 0$ tome $\delta' < \delta$. Para cada $x \in X$,

da continuidade de f, existe $r_x < \frac{\epsilon}{4}$ tal que $f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\frac{\delta'}{4}}(f(x))$

Se $\mathcal{U} = \{B_{r_{x_1}}(x_1), \cdots, B_{r_{x_\ell}}(x_\ell)\}$ cobre X, seja $\mathcal{U}' = \{U_1, \cdots, U_n\}$

um refinamento de $\mathcal{U}$ com ordem $m + 1$ ($m = \dim(X)$).



Construção da aproximação:

Considere uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$ de X tal que

- $\operatorname{diam} U_i < \frac{\epsilon}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant n$,
- $\operatorname{diam} f(U_i) < \frac{\delta}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e
- $\{U_1, \cdots, U_n\}$ tem ordem $m+1$.

Seja $\{\phi_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$.

Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, escolha $x_i \in U_i$ e $z_i \in B^{\mathbb{R}^N_\infty}_{\delta/2}(f(x_i))$, com $\{z_1, \cdots, z_n\}$ em posição geral em $\mathbb{R}^N$. Defina $g : X \to \mathbb{R}^N$ por

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) z_i.$$

Prova que $\max_{x\in X}\|f(x)-g(x)\|_\infty<\delta$**:**

$$g(x)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)(z_i-f(x_i))+\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)(f(x_i)-f(x)).$$

Da escolha de x_i e z_i temos que $\|z_i-f(x_i)\|_\infty<\frac{\delta}{2}$.

Como $\phi_i(x)\neq 0$ implica $x\in U_i$, como $\operatorname{diam}(f(U_i))<\frac{\delta}{2}$, isto é, $\|f(x_i)-f(x)\|_\infty<\frac{\delta}{2}$ sempre que $x\in U_i$ e como $\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)=1$ para todo $x\in X$ temos que $\|g(x)-f(x)\|<\delta$ para todo $x\in X$.

Logo, $\max_{x\in X}\|f(x)-g(x)\|_\infty<\delta$.

Prova que a aproximação está em U_ϵ:

Para ver que $g \in U_\epsilon$ mostraremos que, $g(x) = g(y)$ implica que $x, y \in U_i$, para algum $1 \leqslant i \leqslant n$. Assim, necessariamente, $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ e consequentemente $\Delta(g) \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Suponha que $g(x) = g(y)$. Então $\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)]z_i = 0$.

Do fato que a cobertura $\{U_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ tem ordem $m+1$, no máximo $m+1$ dos $\phi_i(x)$ (e dos $\phi_i(y)$) são não nulos. Logo, a soma $\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)]z_i = 0$ tem no máximo $2m+2$ parcelas não nulas e que $\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 0$.

Como os z_i estão em posição geral, qualquer subconjunto de $N+1$ ou menos elementos são geométricamente independentes.

Como $N+1=2m+2$ devemos ter que $\phi_i(x)=\phi_i(y)$, para $1\leqslant i\leqslant n$.

Daí, para algum $1\leqslant j\leqslant n$, $\phi_j(x)=\phi_j(y) > 0$ e $x, y \in \operatorname{supp}(\phi_j)\subset U_j$.

Como $x, y\in U_j$, segue que $\Delta(g) < \epsilon$. $\square$