Espaços Métricos
Espaços Métricos Separáveis
Aula 24

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

02 de Dezembro de 2020

Segundo Semestre de 2020

Critério negativo para separabilidade

Lema

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se existir uma família $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ tal que

i) $\mathcal{O}_i$ *seja aberto e não vazio em* X*, para todo* $i \in I$*,*

ii) $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \varnothing$*, se* $i \neq j$*, e*

iii) I *não seja enumerável*

então, X *não será separável.*

Prova: Seja $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável de X, como I é não enumerável, existe $i_0 \in I$ tal que $O_{i_0} \cap \{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Segue que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é denso e X não é separável. $\square$

O espaço ℓ_∞ não é separável.

A cada $A \subset \mathbb{N}$ associamos a seqüência $\chi_A = \{x_n\}$ tal que $x_n = 1$ se $n \in A$ e $x_n = 0$ caso contrário.

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todas essas seqüências.

Desta forma $\mathcal{S}$ está em correspondência biunívoca com as partes de $\mathbb{N}$ e portanto $\mathcal{S}$ é um conjunto não enumerável.

Como cada elemento de $\mathcal{S}$ dista, em ℓ_∞, exatamente "um" de qualquer outro elemento de $\mathcal{S}$. Segue que $\{B_{\frac{1}{2}}(\chi_A) \subset \ell^\infty : A \in 2^{\mathbb{N}}\}$ satisfaz as condições do Lema 1 e portanto ℓ_∞ não é separável.

Exercício

Por que razão a construção anterior não funciona em ℓ_p, *com* $1 \leqslant p < \infty$?

Separabilidade de $\mathbf{C}(\mathbf{K},\mathbf{M})$

Sejam (K, d_K) e (M, d_M) espaços métricos.

Daremos condições suficientes para que o espaço $C(K, M)$, com a métrica da convergência uniforme, seja separável.

A seguir recordaremos a noção de *número de Lebesgue*.

Definição

Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de um espaço métrico (X,d). Diremos que um número $\eta>0$ será um número de Lebesgue *de $\mathcal{U}$ se todo subconjunto de X com diâmetro menor que η estiver contido em algum $U\in\mathcal{U}$.*

Proposição

Se (X,d) for métrico compacto, então toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de (X,d) terá um número de Lebesgue.

Recordação da Prova:

Faremos a prova por redução ao absurdo. Suponha que $\mathcal{U}$ seja uma cobertura aberta do espaço métrico compacto (X, d) que não possua um número de Lebesgue.

Então, dados $n \in \mathbb{N}^*$ e cobertura aberta $\mathcal{O}_n$ de X com $\mathrm{diam}(O) < \frac{1}{n}$, para todo $O \in \mathcal{O}_n$, existe $O_n \in \mathcal{O}_n$ tal que O_n não está contido em qualquer dos elementos de $\mathcal{U}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ escolha $x_n \in O_n$.

Passando para uma subseqüência, podemos assumir que $\{x_n\}$ seja convergente, com limite $x \in X$.

Assim, $x \in U_x$ para algum $U_x \in \mathcal{U}$. Consequentemente, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^X(x) \subset U_x$.

Como $\mathrm{diam}(O_n) < \frac{1}{n}$, $x_n \in O_n$ e $x_n \to x$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $O_n \subset B_\epsilon(x)$, para todo $n \geq N$.

Logo, $O_n \subset U_x \in \mathcal{U}$, para todo $n \geq N$, o que é um absurdo. □

Teorema

Sejam (K, d_K) e (M, d_M) espaços métricos. Se K for compacto e M for separável, então $C(K, M)$, com a métrica da convergência uniforme, será separável.

Estragégia da prova

Seja $\{u_\ell : \ell \in \mathbb{N}^*\}$ um subconjunto enumerável denso de M e $\mathcal{U} = \{B_{\frac{1}{k}}(u_\ell) : k, \ell \in \mathbb{N}^*\}$. Reescrevemos $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Como K é compacto, dado $n \in \mathbb{N}^*$, fixe $p_n \in \mathbb{N}$ e compactos $\{K_i^n : 1 \leqslant i \leqslant p_n\}$ com diâmetro menor que n^{-1} de forma que $K = \bigcup_{i=1}^{p_n} K_i^n$.

Estragégia da prova

Dado $n \in \mathbb{N}^*$ e p_n como acima, seja $\sigma_{p_n} = \{U_1^n, \cdots, U_{p_n}^n\}$ uma coleção qualquer com p_n elementos de $\mathcal{U}$.

Indiquemos por $A(n, \sigma_{p_n})$ o conjunto das $f \in C(K, M)$ tais que $f(K_i^n) \subset U_i^n$, para todo $1 \leqslant i \leqslant p_n$.

Estragégia da prova

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $\mathcal{F}_n = \{A(n, \sigma_{p_n}) : \sigma_{p_n} \subset \mathcal{U}$ com p_n elementos$\}$.

$\mathcal{F}_n$ é enumerável, pois $\mathcal{U}$ é enumerável, e $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ é enumerável

Mostraremos que, dados $f \in C(K, M)$ e $\epsilon > 0$, $f \in A(n, \sigma_{p_n}) \subset \bar{B}_\epsilon(f)$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$ e $\sigma_{p_n} \subset \mathcal{U}$, com p_n elementos. O resultado seguirá tomando uma função em cada um dos elementos de $\mathcal{F}$.

Observação

Os $A(n,\sigma_{p_n})$ são abertos de $C(K,M)$. De fato, se $f \in A(n,\sigma_{p_n})$ e

$\epsilon = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p_n} d_M(f(K_i^n),(U_i^n)^c)$ e $d(g,f) < \epsilon$, então $g \in A(n,\sigma_{p_n})$.

Prova:

Mostremos que para cada $f \in C(K,M)$ e $\epsilon > 0$ existem $n \in \mathbb{N}^*$

e $\sigma_{p_n} \subset \mathcal{U}$, com p_n elementos, tais que $f \in A(n,\sigma_{p_n}) \subset \bar{B}_\epsilon(f)$.

Basta encontrar $n \in \mathbb{N}^*$ e $\sigma_{p_n} \subset \mathcal{U}$, com p_n elementos, tais que

$f \in A(n,\sigma_{p_n})$ e $\operatorname{diam}(A(n,\sigma_{p_n})) \leqslant \epsilon$.

Como $f(K)$ é compacto existem $U_j^{p'} \in \mathcal{U}$, $1 \leqslant j \leqslant p'$, com $\mathrm{diam}(U_j^{p'}) < \epsilon$

e $f(K) \subset \bigcup_{j=1}^{p'} U_j^{p'}$. Seja $\eta > 0$ um número de Lebesgue dessa cobertura

e, da continuidade uniforme, $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathrm{diam}(f(K_i^n)) < \eta$, $1 \leqslant i \leqslant p_n$.

Logo podemos escolher, entre os abertos $U_j^{p'}$, $1 \leqslant j \leqslant p'$, abertos U_i^n

tais que $f(K_i^n) \subset U_i^n$, $1 \leqslant i \leqslant p_n$. Isto define $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma_{p_n} = \{U_1^n, \cdots, U_{p_n}^n\}$

com $f \in A(n, \sigma_{p_n})$.

Se $g, h \in A(n, \sigma_{p_n})$ e $x \in K$, então $x \in K_i^n$, para algum $1 \leqslant i \leqslant p_n$.

Logo $g(x), h(x) \in U_i^n$ e, consequentemente, $d_M(g(x), h(x)) < \epsilon$.

Assim, $\max\limits_{x \in K} d_M(g(x), h(x)) < \epsilon$ e $\mathrm{diam}(A(n, \sigma_{p_n})) \leqslant \epsilon$, concluindo a demonstração do teorema. □

Corolário

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então $C(\overline{\Omega}) =: C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ é separável.