Espaços Métricos
Partição da Unidade e Dimensão Topológica
Aula 23

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

21 de Novembro de 2022

Segundo Semestre de 2022

Partição da Unidade

Definição (Partição da Unidade)

Seja X um espaço métrico e $\{U_1, \cdots, U_n\}$ uma cobertura aberta de X. Diremos que uma família $\{\phi_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset C(X, [0,1])$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$ se

$$\operatorname{supp}(\phi_i) = \{x \in X : \phi_i(x) > 0\}^- \subset U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1, \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema (Partição da Unidade)

Seja $\{U_1, \cdots, U_n\}$ cobertura aberta de um métrico compacto (X, ρ).

Então existe uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, \cdots, U_n\}$.

Prova: Podemos escolher coberturas abertas $\{V_1, \cdots, V_n\}$ e

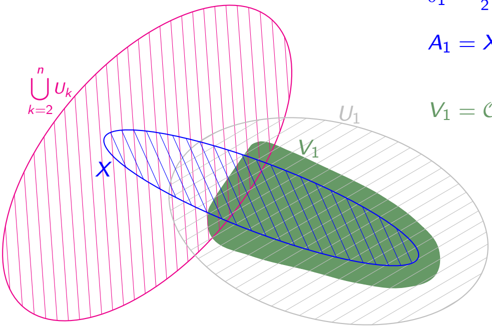
$\{W_1, \cdots, W_n\}$ de X tais que $W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Basta escolher $V_1 = \mathcal{O}_{\delta_1}(A_1)$ onde

$$A_1 = X \setminus \bigcup_{k=2}^{n} U_k \quad \text{e} \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\, d(A_1, X \setminus U_1).$$

Considere a cobertura $\{V_1, U_2, \cdots, U_n\}$ e prossiga por indução.

Exatamente da mesma forma obtemos $\{W_1, \cdots, W_n\}$.



$$\delta_1 = \frac{1}{2}\, d(A_1, X\backslash U_1).$$

$$A_1 = X\backslash \bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq 1}}^{n} U_k$$

$$V_1 = \mathcal{O}_{\delta_1}(A_1)$$

Seja

$$\psi_i(x) = \frac{d(x, X \backslash V_i)}{d(x, W_i) + d(x, X \backslash V_i)}.$$

Claramente $\psi_i : X \to [0,1]$ é contínua, $\mathrm{supp}(\psi_i) \subset \overline{V}_i \subset U_i$,

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \geq 1, \text{ para todo } x \in X,$$

e $\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ com $\phi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\Psi(x)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, é uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, \cdots, U_n\}$. $\square$

Dimensão Topológica

Definição (Dimensão Topológica)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Diremos que X terá **dimensão topológica** *finita se, e somente se,*

- *existir um natural m tal que, qualquer cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tenha um refinamento $\mathcal{U}'$ para o qual, cada ponto de X pertença a no máximo $m+1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$.*

Neste caso, diremos que $\mathcal{U}'$ tem ordem $m+1$. A **dimensão topológica** $\dim(X)$ *de X será o* **menor** *m com esta propriedade.*

J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Pearson (2000) [C.8].

Este conceito tem a propriedade de que a dimensão de qualquer subconjunto compacto com interior não vazio de $\mathbb{R}^n$ é n e,

Teorema

Se (X, ρ) *for métrico compacto com dimensão topológica finita então,* X *será homeomorfo a algum subconjunto de* $\mathbb{R}^{2\dim(X)+1}$.

Este teorema é devido a G. Nöbeling (1931) (veja referência abaixo) e será provado a seguir usando o **Teorema de Baire**.

G. Nöbeling; Über eine n-dimensionale Universalmenge im $\mathbb{R}^{2n+1}$, *Math. Ann.* **104** (1) 71-80 (1931).

Além da dimensão topológica e da dimensão algébrica de espaços vetoriais, existem muitas outras noções de dimensão. Citamos por exemplo a dimensão de Hausdorff e a dimensão fractal.

Também existem outros teoremas de imersão como o Teorema de de Whitney para variedades e o Teorema de Mañé (veja referência abaixo), muito usado em sistemas dinâmicos.

O Teorema de Mañé estabelece que um compacto K, com dimensão fractal $\dim_F(K) < \infty$, de um espaço de Banach real X, pode ser projetado injetivamente em qualquer subespaço vetorial Y de X com dimensão $\dim(Y) > 2\dim_F(K) + 1$.

R. Mañé, *On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps*, Lecture Notes in Mathematics **898** 230-242 Springer-Verlag, New York, 1981.

Ainda

$$dim(X) \leqslant dim_H(X) \leqslant dim_F(X)$$

Definição

Diremos que o conjunto $\{z_0, \cdots, z_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ será geometricamente independente se, e somente se, $\sum_{i=0}^{k} a_i z_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ implicar $a_i = 0$, $0 \leqslant i \leqslant k$.

É claro que $\{z_0, \cdots, z_k\}$ será geometricamente independente se, e somente se, $\{z_1 - z_0, \cdots, z_k - z_0\}$ for linearmente independente.

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ de pontos estará em posição geral em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, todo subconjunto de A com $n+1$, ou menos, pontos de A for geométricamente independente.

Figure: Construção de conjunto em posição geral

Figure: Construção de conjunto em posição geral

Figure: Construção de conjunto em posição geral

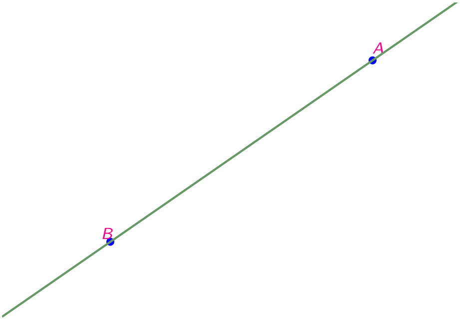


Figure: Construção de conjunto em posição geral

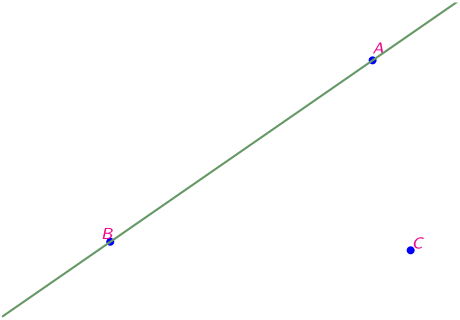


Figure: Construção de conjunto em posição geral

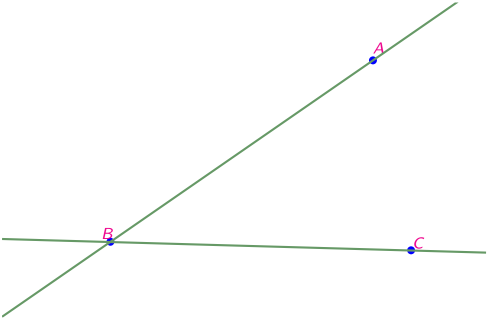


Figure: Construção de conjunto em posição geral

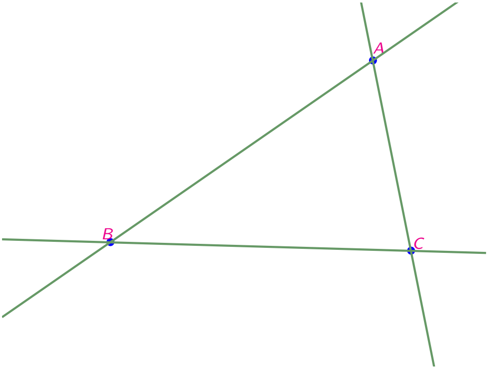


Figure: Construção de conjunto em posição geral

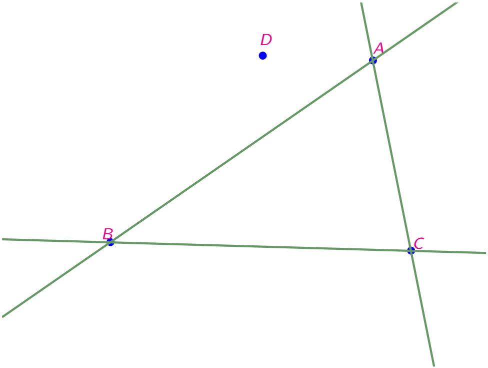


Figure: Construção de conjunto em posição geral

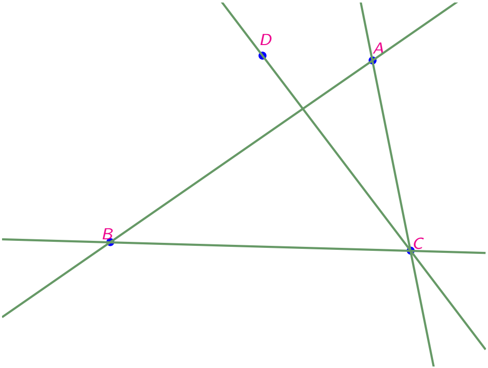


Figure: Construção de conjunto em posição geral

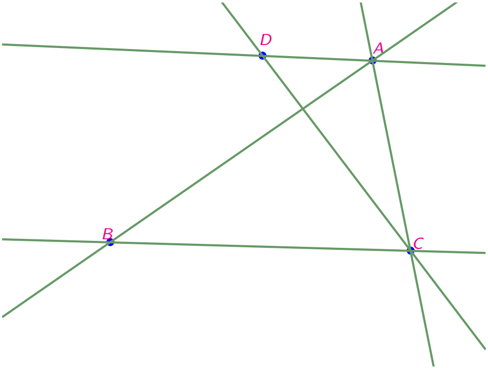


Figure: Construção de conjunto em posição geral

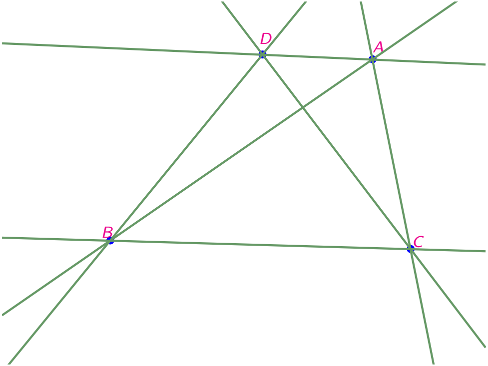


Figure: Construção de conjunto em posição geral

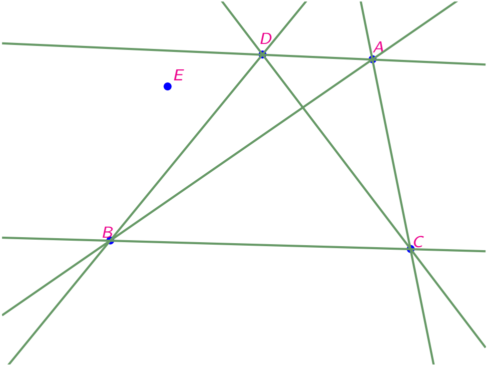


Figure: Construção de conjunto em posição geral

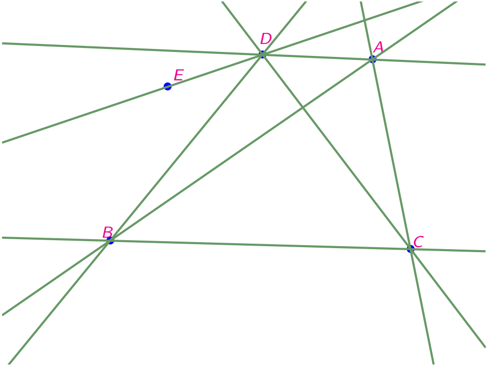


Figure: Construção de conjunto em posição geral

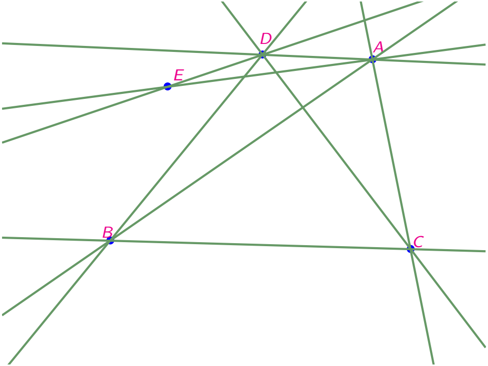


Figure: Construção de conjunto em posição geral

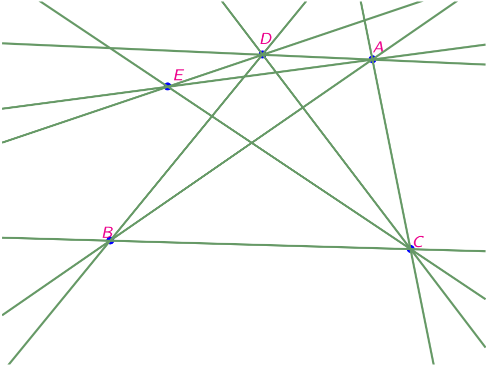


Figure: Construção de conjunto em posição geral

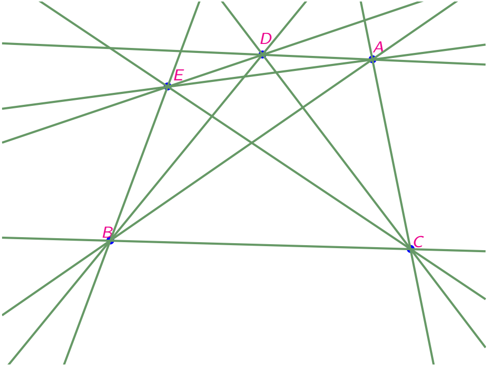
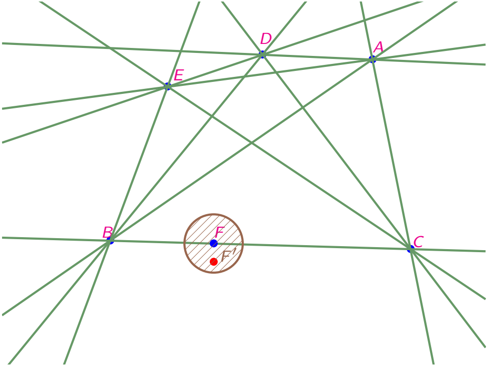


Figure: Construção de conjunto em posição geral



- $\{A,B,C,D,E,F\}$ não estão em posição geral.
- Podemos escolher F' arbitrariamente próximo a F de modo que $\{A,B,C,D,E,F'\}$ estejam em posição geral.

Teorema

Dado um conjunto finito $\{z_1, \cdots, z_\ell\}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$ existe um conjunto $\{y_1, \cdots, y_\ell\}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão em posição geral em $\mathbb{R}^n$ e tal que $\|z_i - y_i\|_\infty < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Prova: A prova é feita por indução. Faça $y_1 = z_1$ e se $\{y_1, \cdots, y_p\}$ estão em posição geral e satisfazem $\|z_i - y_i\|_\infty < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Considere y_{p+1} um ponto que não pertence a nenhum dos hiperplanos gerados por n ou menos pontos de $\{y_1, \cdots, y_p\}$ (aqui usamos o Teorema de Baire) e que diste menos que δ de z_{p+1}. Assim $\{y_1, \cdots, y_p, y_{p+1}\}$ está em posição geral. □

Teorema (de Imersão)

Todo espaço métrico compacto de dimensão topológica m é homeomorfo a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{2m+1}$

Prova: Terminologia

Seja $N = 2m + 1$ e denote por $\mathbb{R}^N_\infty$ o espaço $\mathbb{R}^N$ com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$.

Seja $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ o espaço das funções contínuas com a norma $\|f\|_{\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N_\infty)} = \max_{x \in X} \|f(x)\|_\infty$.

Segue que $\mathbb{R}^N_\infty$ e $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ são espaços métricos completos.

Estratégia da prova: Dada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ **[completo]** defina

$$\Delta(f) = \max_{z \in f(X)} \operatorname{diam}(f^{-1}(z)).$$

Note que, $\Delta(f) = 0$ se, e somente se, f é injetiva.

Observação: $\Delta(f)$ é uma medida do quanto f deixa de ser injetiva.

Dado $\epsilon > 0$, defina $U_\epsilon = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty) : \Delta(f) < \epsilon\}$. Mostraremos que U_ϵ é aberto e denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$. Do **Teorema de Baire**,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$$

será denso um em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ de funções injetivas.

Como X é compacto, X será homeomorfo a um compacto de $\mathbb{R}^N_\infty$.