Espaços Métricos
Espaços Métricos Separáveis
Aula 23 - 2

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

30 de Novembro de 2020

Segundo Semestre de 2020

Espaços Métricos Separáveis

Diremos que um espaço métrico (X, ρ) será *separável* se X possuir um subconjunto enumerável denso.

Exemplos:

- Todo espaço métrico totalmente limitado.
- $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com as métricas usuais são métricos separáveis.
- Os espaços métricos $(X_1, \rho_1), \cdots, (X_n, \rho_n)$ serão separáveis se, e somente se, $(\prod_{i=1}^{n} X_i, \pi_p)$ for separável
- $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ com as métricas usuais são métricos separáveis.
- $\mathbb{R}^n$ com a métrica discreta não é separável.

Proposição

Se (X, d) é um espaço métrico separável e Y é um subconjunto de X então, (Y, d) é separável.

Prova: Como (X, d) é separável, seja $\{u_m : m \in \mathbb{N}\} \subset X$ denso em X. Se $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (0, \infty)$, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, escolha $a_{m,n} \in B_{r_n}(u_m) \cap Y$ quando este conjunto é não vazio. Note que $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_{r_n}(u_m) = X$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Disto segue facilmente que $\{a_{m,n}\}$ é enumerável e denso de Y. $\square$

Vamos mostrar que os espaços ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, são separáveis e que ℓ_∞ não é separável.

Os espaços ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, são separáveis.

Seja $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ com 1 na $k-$ésima posição. Mostremos que o conjunto enumerável $\mathcal{E}$ das combinações lineares finitas com coeficientes racionais de $\{e_1, e_2, \cdots\}$ é denso em ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$.

De fato: Dados $x=\{x_1,x_2,x_3,\cdots\}\in\ell_p$ e $\epsilon>0$, seja $k\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}|x_i|^p<\frac{\epsilon^p}{2}$$

e sejam $r_1,\ldots,r_k$ racionais tais que

$$|x_i-r_i|^p<\frac{\epsilon^p}{2k}.$$

Então para $r=\{r_1,\ldots,r_k,0,0,\ldots\}\in\mathcal{E}$ temos que

$$\rho_p(x,r)^p=\sum_{i=1}^{k}|x_i-r_i|^p+\sum_{i=k+1}^{\infty}|x_i|^p<\epsilon^p.$$

Lema

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se existir uma família $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ tal que

$i)$ $\mathcal{O}_i$ seja aberto e não vazio em X, para todo $i \in I$,

$ii)$ $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \varnothing$, se $i \neq j$, e

$iii)$ I não seja enumerável

então, X não será separável.

Prova: Seja $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável de X, como I é não enumerável, existe $i_0 \in I$ tal que $O_{i_0} \cap \{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Segue que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é denso e X não é separável. $\square$

O espaço ℓ_∞ não é separável.

A cada $A \subset \mathbb{N}$ associamos a seqüência $\chi_A = \{x_n\}$ tal que $x_n = 1$ se $n \in A$ e $x_n = 0$ caso contrário.

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de todas essas seqüências.

Desta forma $\mathcal{S}$ está em correspondência biunívoca com as partes de $\mathbb{N}$ e portanto $\mathcal{S}$ é um conjunto não enumerável.

Como cada elemento de $\mathcal{S}$ dista, em ℓ_∞, exatamente "um" de qualquer outro elemento de $\mathcal{S}$. Segue que $\{B_{\frac{1}{2}}(\chi_A) \subset \ell^\infty : A \in 2^{\mathbb{N}}\}$ satisfaz as condições do Lema 1 e portanto ℓ_∞ não é separável.

Exercício

Por que razão a construção anterior não funciona em ℓ_p, com $1 \leqslant p < \infty$?