Espaços Métricos
Espaços Métricos Compactos - Lema de Riesz
Aula 23-1

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

30 de Novembro de 2020

Segundo Semestre de 2020

Lema de Riesz

Nesta seção mostraremos que a bola unitária de um espaço vetorial normado X será compacta se, e somente se, X tiver dimensão finita.

Concluiremos, com isto, que todo compacto em dimensão infinita terá interior vazio.

Começamos com o seguinte resultado:

Lemma (Lemma de Riesz)

Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M \subsetneq X$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ e $\operatorname{dist}(u, M) \geqslant 1 - \epsilon$.

Prova: Sem perda de generalidade podemos supor que $0 < \epsilon < 1$. Seja $v \in X \setminus M$. Como M é fechado, $\operatorname{dist}(v, M) =: d > 0$. Escolha $m_0 \in M$ tal que $d \leqslant \|v - m_0\| \leqslant \frac{d}{1-\epsilon}$. Seja $u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$ e $m \in M$, então $m_0 + \|v - m_0\| m \in M$ e u satisfaz

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| = \left\| \frac{v - m_0 - m\|v - m_0\|}{\|v - m_0\|} \right\| \geqslant \frac{d}{\|v - m_0\|} \geqslant 1 - \epsilon. \quad \square$$

Theorem (Riesz)

Se X for um espaço vetorial normado e $\bar{B}_1(0) = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ for compacta então, X terá dimensão finita.

Prova: Suponha que X tenha dimensão infinita. Então existirão subespaços M_n, $n \in \mathbb{N}$, de X tais que $\dim M_n = n$ e $M_n \subset M_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M_n é fechado, do Lema de Riesz, existirá $u_n \in M_n$, $\|u_n\| = 1$, tal que $\operatorname{dist}(u_n, M_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$.

É fácil ver que $\{u_n\}$ não terá subseqüência convergente e $\bar{B}_1(0)$ não será compacta. $\square$

Segue facilmente do Teorema de Riesz que

Corolário

Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Se $K \subset X$ for compacto então, $K^{\circ} = \varnothing$.

Exemplo

Para espaços ℓ_p o corolário acima é trivial pois podemos exibir explicitamente uma seqüência com as propriedades mencionadas na prova do Teorema de Riesz.