Espaços Métricos
Espaços Métricos Compactos - Convexos, Interseção de conexos e partição da unidade
Aula 22

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

16 de Novembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

O Teorema de Mazur

Nesta seção $(X, \|\cdot\|_X)$ será um espaço vetorial normado.

Recorde que $C \subset X$ é convexo, se somente se,

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\} \subset C \text{ sempre que } x, y \in C.$$

Exercício

Mostre que a interseção qualquer de convexos é convexa.

Definição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$.

Definimos a envoltória convexa de K por

$$\mathrm{co}K = \bigcap \{C \subset X : C \text{ é convexo e } C \supset K\}$$

Proposição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$ convexo.

Então,

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ e \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Prova: É claro que

$$K \subset \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*, \; k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Seja

$$K_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Mostremos, por indução, que $K_n \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

É claro que $K_1 \subset K$.

Suponha que, para $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $K_j \subset K$ e mostremos que $K_n \subset K$.

Seja $k \in K_n$, isto é, $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i$, com $k_i \in K$, $\alpha_i \in [0,1]$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Se $\alpha_j = 0$, para algum $1 \leqslant j \leqslant n$, acabamos.

Se $\alpha_i \neq 0$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, defina $0 < \beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i < 1$.

Assim, $\alpha_n = 1 - \beta$ e

$$\hat{k} := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\beta} k_i \in K \quad \text{e} \quad k_n \in K.$$

Da convexidade de K temos que

$$k = \beta \hat{k} + (1-\beta) x_n \in K. \qquad \square$$

Exercício

Mostre que o fecho de um conjunto convexo é convexo.

Proposição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$. Então,

$$\mathrm{co}K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ \ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ \ e\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Prova: Para verificar que o conjunto

$$\hat{K} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ \text{e}\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

é convexo tomamos dois elementos $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i$ e $x' = \sum_{i=1}^{n'} \alpha'_i k'_i$ de $\hat{K}$ e notamos que, se $\beta \in [0,1]$, $\beta x + (1-\beta)x' \in \hat{K}$ (exercício). Logo $K \subset \mathrm{co}K \subset \hat{K}$.

Do teorema anterior, um convexo que contenha K deve também conter $\hat{K}$. Logo $\mathrm{co}K = \hat{K}$ e o resultado está demonstrado. $\square$

Definição

Chamaremos $\overline{\mathrm{co}}K := (\mathrm{co}K)^-$ *de envoltória convexa fechada de* K.

Exercício

Mostre que $\overline{\mathrm{co}}K = \bigcap\{F \subset X : F$ *é convexo e* $F = F^- \supset K\}$.

Proposição (Teorema de Mazur)

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ *for um espaço vetorial normado e* $K \subset X$ *for totalmente limitado então,* $\mathrm{co}K$ *será totalmente limitada.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ dado. Fixe $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ e $k_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant n_\epsilon$, tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k_i)$. Se $K_\epsilon = \mathrm{co}\{k_1, \cdots, k_{n_\epsilon}\}$. Da Proposição 2 (completando com zeros as somas com menos de n_ϵ somandos)

$$K_\epsilon = \left\{ \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i k_i : \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n_\epsilon, \text{ e } \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i = 1, \right\}.$$

Note que $f : S_{n_\epsilon} \to X$, $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_\epsilon}) = \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i k_i$ é contínua e

$$S_{n_\epsilon} = \left\{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_\epsilon}) \in [0,1]^{n_\epsilon} : \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i = 1 \right\}$$

é compacto (exercício). Como $f(S_{n_\epsilon}) = K_\epsilon$, K_ϵ é compacto.

Note que $\{B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k_\epsilon) : k_\epsilon \in K_\epsilon\}$, como cobertura de K_ϵ, tem uma subcobertura finita $\{B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k^i_\epsilon) : 1 \leqslant i \leqslant m_\epsilon\}$.

Segue que $\{B^X_{\epsilon}(k^i_\epsilon) : 1 \leqslant i \leqslant m_\epsilon\}$ cobre $\mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K_\epsilon) = \mathrm{co}\bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k_i)$ que contém $\mathrm{co}K$. $\square$

Corolário

Se X for um espaço de Banach e $K \subset X$ for um conjunto compacto então, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ será compacto.

Interseção de compactos e conexos

Teorema

Seja (X, ρ) *um espaço métrico compacto. Se* $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ *for uma seqüência decrescente de conjuntos não vazios, fechados e conexos de* X *então, a interseção* $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ *será não vazia e conexa.*

Prova: Sabemos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ é não vazia e compacta. Suponha que $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ não seja conexa.

Se A e B forem fechados, disjuntos, não vazios e $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = A \cup B$, sejam U e V abertos disjuntos tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

Faça $F_i = M_i \backslash (U \cup V)$. Então $\{F_i\}$ é uma seqüência encaixada de compactos cuja interseção é vazia e portanto, algum $F_i = \varnothing$.

Isto é $M_i \subset U \cup V$. Contudo, M_i intersepta ambos U e V, pois $M_i \supset A \cup B$. Como M_i é conexo, isto é uma contradição. $\square$

Não é verdade, em geral, que interseção infinita de conexos encaixados seja conexa.

Um exemplo simples é dado pela seguinte coleção de conexos

$$\left\{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\}:-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{1}{n}\leqslant y\leqslant\frac{1}{n}\right\},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

Partição da Unidade

Definição (Partição da Unidade)

Seja X um espaço métrico e $\{U_1, \cdots, U_n\}$ uma cobertura aberta de X. Diremos que uma família $\{\phi_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset C(X, [0,1])$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$ se

$$\mathrm{supp}(\phi_i) = \{x \in X : \phi_i(x) > 0\}^- \subset U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1, \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema (Partição da Unidade)

Seja $\{U_1, \cdots, U_n\}$ cobertura aberta de um métrico compacto (X, ρ).

Então existe uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, \cdots, U_n\}$.

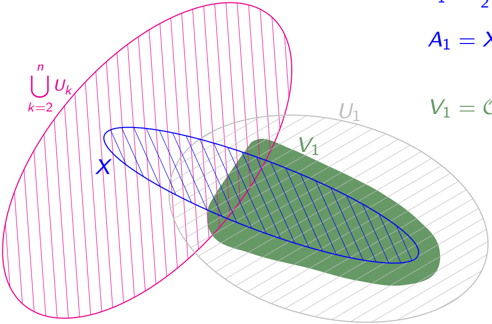
Prova: Podemos escolher coberturas abertas $\{V_1, \cdots, V_n\}$ e $\{W_1, \cdots, W_n\}$ de X tais que $W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Basta escolher $V_1 = \mathcal{O}_{\delta_1}(A_1)$ onde

$$A_1 = X \setminus \bigcup_{k=2}^{n} U_k \quad \text{e} \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\, d(A_1, X \setminus U_1).$$

Considere a cobertura $\{V_1, U_2, \cdots, U_n\}$ e prossiga por indução.

Exatamente da mesma forma obtemos $\{W_1, \cdots, W_n\}$.



$$\delta_1 = \frac{1}{2}\, d(A_1, X \backslash U_1).$$

$$A_1 = X \backslash \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{n} U_k$$

$$V_1 = \mathcal{O}_{\delta_1}(A_1)$$

Seja

$$\psi_i(x) = \frac{d(x, X\backslash V_i)}{d(x, W_i) + d(x, X\backslash V_i)}.$$

Claramente $\psi_i : X \to [0,1]$ é contínua, $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset \overline{V}_i \subset U_i$,

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \geq 1, \text{ para todo } x \in X$$

e $\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ com $\phi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\Psi(x)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, é uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, \cdots, U_n\}$. $\square$

Dimensão Topológica

Definição (Dimensão Topológica)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Diremos que X terá **dimensão topológica** *finita se, e somente se,*

- *existir um natural m tal que, qualquer cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tenha um refinamento $\mathcal{U}'$ para o qual, cada ponto de X pertença a no máximo $m+1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$.*

Neste caso, diremos que $\mathcal{U}'$ tem ordem $m+1$. A **dimensão topológica** $\dim(X)$ *de X será o* **menor** *m com esta propriedade.*

J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Pearson (2000) [C.8].

Este conceito tem a propriedade de que a dimensão de qualquer subconjunto compacto com interior não vazio de $\mathbb{R}^n$ é n e,

Teorema

Se (X, ρ) for métrico compacto com dimensão topológica finita então, X será homeomorfo a algum subconjunto de $\mathbb{R}^{2\dim(X)+1}$.

Este teorema é devido a G. Nöbeling (1931) (veja referência abaixo) e será provado a seguir usando o **Teorema de Baire**.

G. Nöbeling; Über eine n-dimensionale Universalmenge im $\mathbb{R}^{2n+1}$, *Math. Ann.* **104** (1) 71-80 (1931).

Além da dimensão topológica e da dimensão algébrica de espaços vetoriais, existem muitas outras noções de dimensão. Citamos por exemplo a dimensão de Hausdorff e a dimensão fractal.

Também existem outros teoremas de imersão como o Teorema de de Whitney para variedades e o Teorema de Mañé (veja referência abaixo), muito usado em sistemas dinâmicos.

Ele estabelece que um compacto K, com dimensão fractal $\dim_F(K) < \infty$, de um espaço de Banach real X, pode ser projetado injetivamente em qualquer subespaço vetorial Y de X com dimensão $\dim(Y) > 2\dim_F(K) + 1$.

R. Mañé, *On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps*, Lecture Notes in Mathematics **898** 230-242 Springer-Verlag, New York, 1981.

Definição

Diremos que o conjunto $\{z_0, \cdots, z_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ será geometricamente independente se, e somente se, $\sum_{i=0}^{k} a_i z_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ implicar $a_i = 0$, $0 \leqslant i \leqslant k$.

É claro que $\{z_0, \cdots, z_k\}$ será geometricamente independente se, e somente se, $\{z_1 - z_0, \cdots, z_k - z_0\}$ for linearmente independente.

Definição

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ de pontos estará em posição geral em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, todo subconjunto de A com $n+1$, ou menos, pontos de A for geométricamente independente.

Figure: Construção de conjunto em posição geral

Figure: Construção de conjunto em posição geral

Figure: Construção de conjunto em posição geral

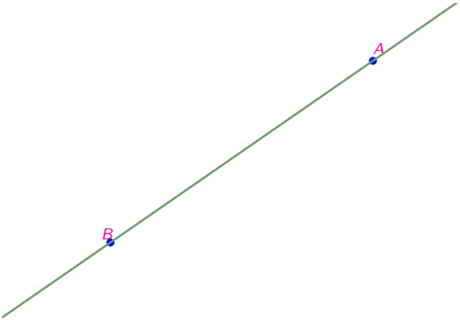


Figure: Construção de conjunto em posição geral

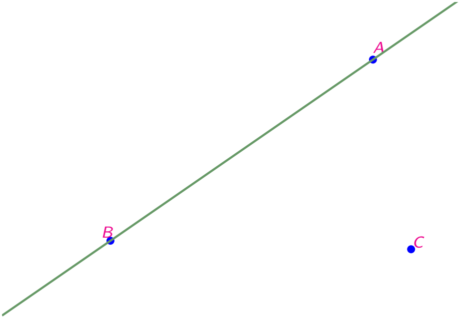


Figure: Construção de conjunto em posição geral

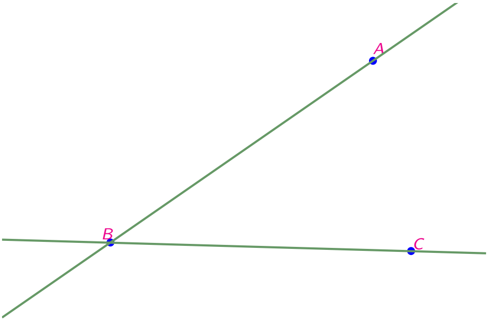


Figure: Construção de conjunto em posição geral

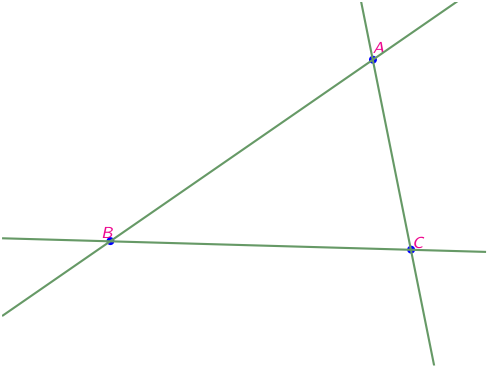


Figure: Construção de conjunto em posição geral

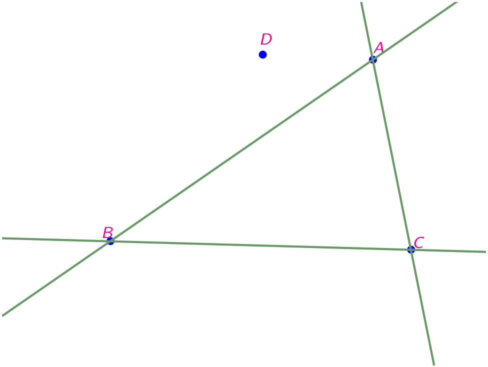


Figure: Construção de conjunto em posição geral

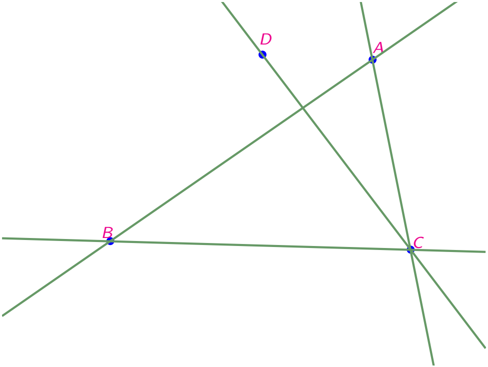


Figure: Construção de conjunto em posição geral

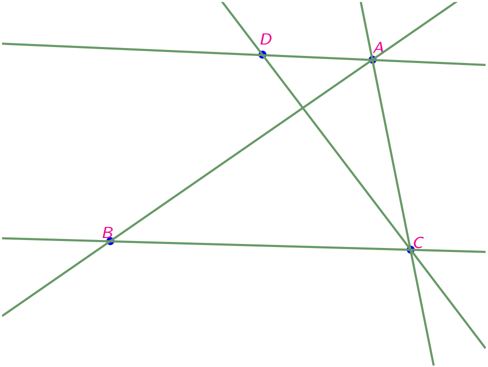
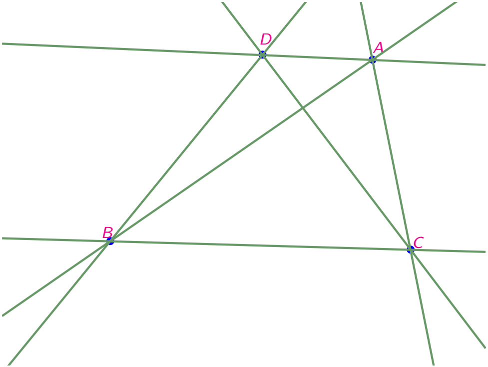


Figure: Construção de conjunto em posição geral



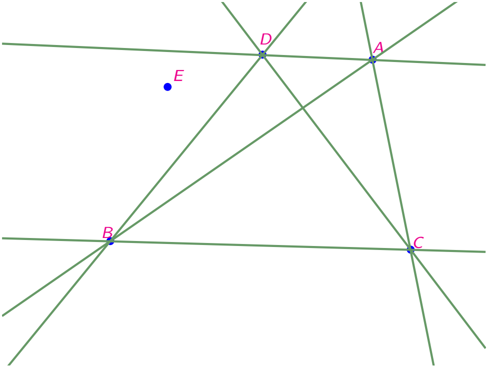
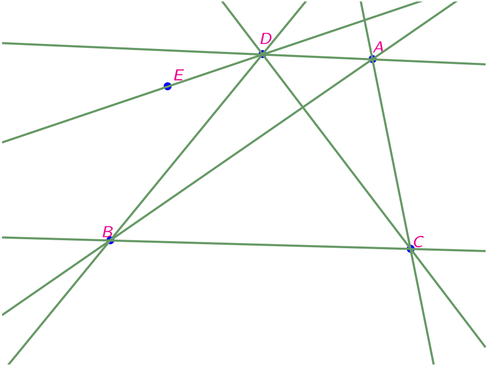


Figure: Construção de conjunto em posição geral

Figure: Construção de conjunto em posição geral



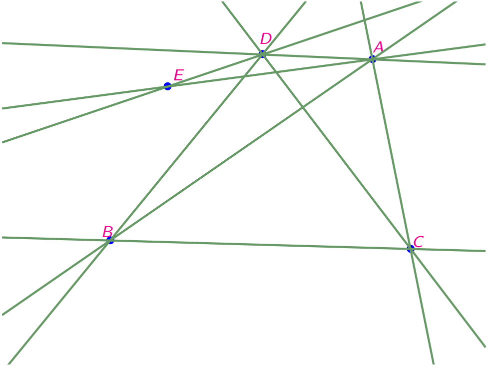


Figure: Construção de conjunto em posição geral

Figure: Construção de conjunto em posição geral

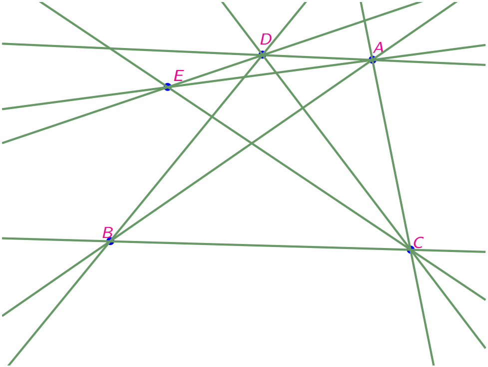


Figure: Construção de conjunto em posição geral

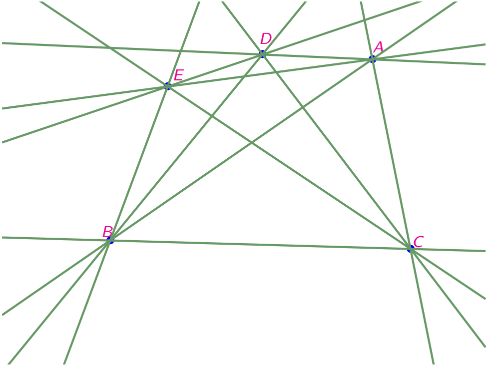
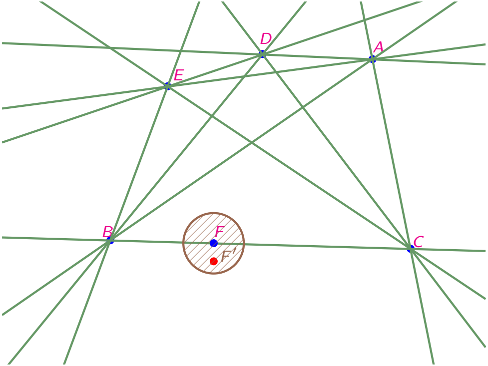


Figure: Construção de conjunto em posição geral



- $\{A,B,C,D,E,F\}$ não estão em posição geral.
- Podemos escolher F' arbitrariamente próximo a F de modo que $\{A,B,C,D,E,F'\}$ estejam em posição geral.

Teorema

Dado um conjunto finito $\{z_1, \cdots, z_\ell\}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$ existe um conjunto $\{y_1, \cdots, y_\ell\}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão em posição geral em $\mathbb{R}^n$ e tal que $\|z_i - y_i\|_\infty < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Prova: A prova é feita por indução. Faça $y_1 = z_1$ e se $\{y_1, \cdots, y_p\}$ estão em posição geral e satisfazem $\|z_i - y_i\|_\infty < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Considere y_{p+1} um ponto que não pertence a nenhum dos hiperplanos gerados por n ou menos pontos de $\{y_1, \cdots, y_p\}$ (aqui usamos o Teorema de Baire) e que diste menos que δ de z_{p+1}. Assim $\{y_1, \cdots, y_p, y_{p+1}\}$ está em posição geral. $\square$

Teorema (de Imersão)

Todo espaço métrico compacto de dimensão topológica m é homeomorfo a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{2m+1}$

Prova: Terminologia

Seja $N = 2m + 1$ e denote por $\mathbb{R}^N_\infty$ o espaço $\mathbb{R}^N$ com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$.

Seja $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ o espaço das funções contínuas com a norma $\|f\|_{\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N_\infty)} = \max_{x \in X} \|f(x)\|_\infty$.

Segue que $\mathbb{R}^N_\infty$ e $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ são espaços métricos completos.

Estratégia da prova: Dada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ **[completo]** defina

$$\Delta(f) = \max_{z \in f(X)} \operatorname{diam}(f^{-1}(z)).$$

Note que, $\Delta(f) = 0$ se, e somente se, f é injetiva.

Observação: $\Delta(f)$ é uma medida do quanto f deixa de ser injetiva.

Dado $\epsilon > 0$, defina $U_\epsilon = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty) : \Delta(f) < \epsilon\}$. Mostraremos que U_ϵ é aberto e denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$. Do **Teorema de Baire**,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$$

será denso um em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ de funções injetivas.

Como X é compacto, X será homeomorfo a um compacto de $\mathbb{R}^N_\infty$.

Mostremos que U_ϵ é aberto em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$.

Dado $f \in U_\epsilon$ escolha $b \in (\Delta(f), \epsilon)$.

Note que, se $f(x) = f(y) = z$, $\{x, y\} \subset f^{-1}(z)$ e $d(x, y) < b$.

Se $F = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \geq b\}$ então, F é compacto e

$X \times X \ni (x, y) \mapsto \|f(x) - f(y)\|_\infty \in \mathbb{R}^+$ é positiva em F.

Seja $\delta = \frac{1}{2} \min\{\|f(x) - f(y)\|_\infty : (x, y) \in F\}$.

Se $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$, $\max\limits_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \delta$, para $(x, y) \in F$ temos

$\|f(x) - f(y)\|_\infty \geq 2\delta$ e $\|g(x) - g(y)\|_\infty > 0$.

Logo, $g(x) = g(y)$ implica que $d(x, y) < b$ e portanto $\Delta(g) \leqslant b < \epsilon$.

Segue que $g \in U_\epsilon$ e U_ϵ é aberto.

Mostremos que U_ϵ é denso em $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N_\infty)$.

Seja $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N_\infty)$ e $\epsilon > 0$ fixo.

Dado $\delta > 0$, mostremos $\max\limits_{x\in X}\|f(x)-g(x)\|_\infty < \delta$, para algum $g \in U_\epsilon$.

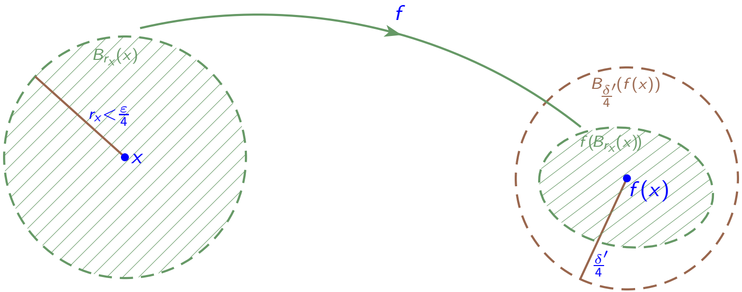
Contrução da cobertura de X:

Fixe $\epsilon > 0$. Dado $\delta > 0$ tome $\delta' < \delta$. Para cada $x \in X$,

da continuidade de f, existe $r_x < \frac{\epsilon}{4}$ tal que $f(B_{r_x}(x)) \subset B_{\frac{\delta'}{4}}(f(x))$

Se $\mathcal{U} = \{B_{r_{x_1}}(x_1), \cdots, B_{r_{x_\ell}}(x_\ell)\}$ cobre X, seja $\mathcal{U}' = \{U_1, \cdots, U_n\}$

um refinamento de $\mathcal{U}$ com ordem $m + 1$ ($m = \dim(X)$).



Construção da aproximação:

Considere uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$ de X tal que

- $\operatorname{diam} U_i < \frac{\epsilon}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant n$,
- $\operatorname{diam} f(U_i) < \frac{\delta}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e
- $\{U_1, \cdots, U_n\}$ tem ordem $m+1$.

Seja $\{\phi_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{U}$.

Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, escolha $x_i \in U_i$ e $z_i \in B^{\mathbb{R}^N}_{\delta/2}(f(x_i))$, com $\{z_1, \cdots, z_n\}$ em posição geral em $\mathbb{R}^N$. Defina $g : X \to \mathbb{R}^N$ por

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) z_i.$$

Prova que $\max_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \delta$:

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)(z_i - f(x_i)) + \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)).$$

Da escolha de x_i e z_i temos que $\|z_i - f(x_i)\|_\infty < \frac{\delta}{2}$.

Como $\phi_i(x) \neq 0$ implica $x \in U_i$, como $\operatorname{diam}(f(U_i)) < \frac{\delta}{2}$, isto é, $\|f(x_i) - f(x)\|_\infty < \frac{\delta}{2}$ sempre que $x \in U_i$ e como $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ para todo $x \in X$ temos que $\|g(x) - f(x)\| < \delta$ para todo $x \in X$.

Logo, $\max_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \delta$.

Prova que a aproximação está em U_ϵ:

Para ver que $g \in U_\epsilon$ mostraremos que, $g(x) = g(y)$ implica que $x, y \in U_i$, para algum $1 \leqslant i \leqslant n$. Assim, necessariamente, $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ e consequentemente $\Delta(g) \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Suponha que $g(x) = g(y)$. Então $\sum_{i=1}^{n} [\phi_i(x) - \phi_i(y)] z_i = 0$.

Do fato que a cobertura $\{U_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ tem ordem $m+1$, no máximo $m+1$ dos $\phi_i(x)$ (e dos $\phi_i(y)$) são não nulos. Logo, a soma $\sum_{i=1}^{n} [\phi_i(x) - \phi_i(y)] z_i = 0$ tem no máximo $2m + 2$ parcelas não nulas e que $\sum_{i=1}^{n} [\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 0$.

Como os z_i estão em posição geral, qualquer subconjunto de $N+1$ ou menos elementos são geométricamente independentes.

Como $N+1=2m+2$ devemos ter que $\phi_i(x)=\phi_i(y)$, para $1\leqslant i\leqslant n$.

Daí, para algum $1\leqslant j\leqslant n$, $\phi_j(x)=\phi_j(y)>0$ e $x,y\in \operatorname{supp}(\phi_j)\subset U_j$.

Como $x,y\in U_j$, segue que $\Delta(g)<\epsilon$. $\square$