

ESPAÇOS MÉTRICOS

Espaços Métricos Compactos

O Teorema de Arzelá-Ascoli e Aplicações

Aula 22

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

25 de Novembro de 2020
Segundo Semestre de 2020

Terminologia para o Teorema de Arzelá-Ascoli

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. O espaço métrico das funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com a métrica

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

é um espaço métrico completo que denotamos por $C(X, \mathbb{R})$.

Definição (Famílias Uniformemente Limitadas)

Uma coleção \mathcal{F} de funções será dita **uniformemente limitada** se for limitada em $C(X, \mathbb{R})$, isto é, se existir $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

Definição (Famílias Equicontínuas)

Uma coleção \mathcal{F} de funções em $C(X, \mathbb{R})$ será chamada **equicontínua** se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que,

$$f \in \mathcal{F}, x, x' \in X, \rho(x', x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Exemplo

- Uma coleção finita em $C(X, \mathbb{R})$ será **equicontínua**
- Se $L > 0$, f será Lipschitz com constante L se, e somente se, $|f(x) - f(y)| \leq L\rho(x, y)$, para todo $x, y \in X$. Se

$$\mathcal{F}_L = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f \text{ é Lipschitz com constante } L\}$$

então, \mathcal{F}_L é uma família equicontínua e fechada de $C(X, \mathbb{R})$.

Teorema de Arzelá-Ascoli

Teorema (Arzelá-Ascoli)

Se (X, ρ) for compacto, $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R})$ será relativamente compacto se, e somente se, for uniformemente limitada e equicontínua.



Arzelà, Cesare. Note on series of analytic functions. *Ann. of Math.* **5** (2) (1904) 51-63.

Prova: Se \mathcal{F} for relativamente compacto, \mathcal{F} será totalmente limitado e portanto limitado em $C(X, \mathbb{R})$.

Dado $\epsilon > 0$ sejam f_1, \dots, f_n tais que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_i)$. Se $f \in \mathcal{F}$, $x, x' \in X$ e $1 \leq i \leq n$, temos

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')|.$$

Escolha $1 \leq j \leq n$ tal que

$$\max_{x \in X} |f(x) - f_j(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então

$$|f(x) - f(x')| \leq \frac{2\epsilon}{3} + |f_j(x) - f_j(x')|.$$

Como X é compacto, f_1, \dots, f_n são uniformemente contínuas.

Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implica

$$|f_i(x) - f_i(x')| < \frac{\epsilon}{3}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Segue que se $\rho(x, x') < \delta$ então,

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

e \mathcal{F} é equicontínuo.

Reciprocamente, se \mathcal{F} for uniformemente limitado e equicontínuo.

Seja $\epsilon > 0$ e M um inteiro positivo tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}$$

Escolha $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{4}$, $\forall f \in \mathcal{F}$.

Como X é compacto existem x_1, \dots, x_n tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\delta(x_i)$.

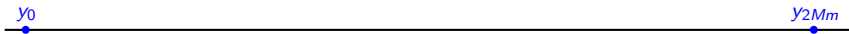
Escolha um número inteiro positivo m tal que $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{4}$ e divida

$[-M, M]$ em $2Mm$ intervalos comprimento $\frac{1}{m}$ pelos pontos

$$y_0 = -M < \dots < y_i := -M + \frac{i}{m} < \dots < y_{2Mm} = M, \quad 0 \leq i \leq 2Mm.$$

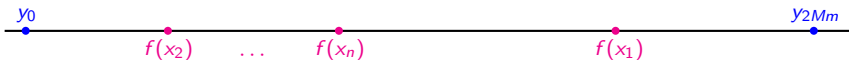
Dada uma função $f \in \mathcal{F}$, recorde que $f(x) \in [y_0, y_{2Mm}]$.

Calculamos os seus valores nos pontos x_i , $1 \leq i \leq n$.



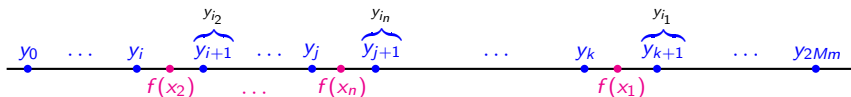
Dada uma função $f \in \mathcal{F}$, recorde que $f(x) \in [y_0, y_{2Mm}]$.

Calculamos os seus valores nos pontos x_i , $1 \leq i \leq n$.



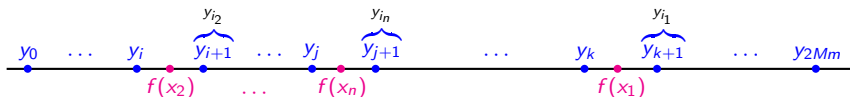
Dada uma função $f \in \mathcal{F}$, recorde que $f(x) \in [y_0, y_{2Mm}]$.

Calculamos os seus valores nos pontos x_i , $1 \leq i \leq n$.



Dada uma função $f \in \mathcal{F}$, recorde que $f(x) \in [y_0, y_{2Mm}]$.

Calculamos os seus valores nos pontos x_i , $1 \leq i \leq n$.



Considere as n -uplas $(y_{i_1}, \dots, y_{i_n})$ de números y_i , $1 \leq i \leq 2Mm$, tais que para algum $f \in \mathcal{F}$

$$|f(x_j) - y_{i_j}| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

e escolha um tal $f \in \mathcal{F}$ para cada n -upla.

Se \mathcal{E} é o conjunto resultante dessa escolha, \mathcal{E} é finito.

Mostremos que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{f \in \mathcal{E}} B_\epsilon(f)$.

Se $f \in \mathcal{F}$ escolhemos y_{i_1}, \dots, y_{i_n} tal que

$$|f(x_j) - y_{i_j}| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

e seja $e \in \mathcal{E}$ tal que

$$|e(x_j) - y_{i_j}| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Seja $x \in X$ e $1 \leq j \leq n$ tal que $\rho(x, x_j) < \delta$. Então

$$|f(x) - e(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - y_j| + |y_j - e(x_j)| + |e(x_j) - e(x)|$$
$$< \epsilon.$$

Logo

$$\max_{x \in X} |f(x) - e(x)| < \epsilon.$$

e \mathcal{F} será totalmente limitado. \square

Teorema de Peano

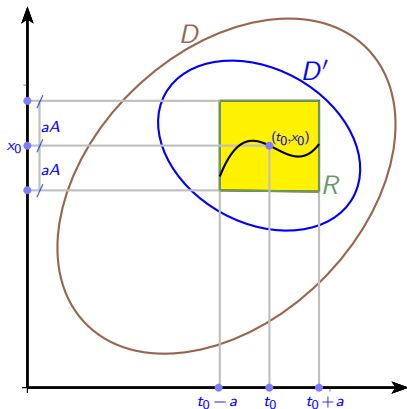


Peano, G.; Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. *Math. Ann.* **37** (1890) (2) 182-228.

Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua.

Teorema (Peano)

Dado $(t_0, x_0) \in D$ a equação diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ tem ao menos uma solução local passando por (t_0, x_0) .



Prova: Seja $(t_0, x_0) \in D' \subset D$ aberto tal que f é limitada em D' e seja A tal que $|f(t, x)| \leq A$ para todo $(t, x) \in D'$. Seja $a > 0$ tal que $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_{aA}(x_0)^- \subset D'$.

Da continuidade uniforme de f em R , dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que,
 $(t, x), (t', x') \in R, |t - t'| < \delta$ e $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(t, x) - f(t', x')| < \epsilon.$

Seja $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + a$ uma partição do intervalo $[t_0, t_0 + a]$
tal que $|t_i - t_{i-1}| < \min(\delta, \frac{\delta}{A}), 1 \leq i \leq n.$

Seja $\phi_\epsilon : [t_0, t_0 + a] \rightarrow B_{aA}(x_0)^-$ definida por:

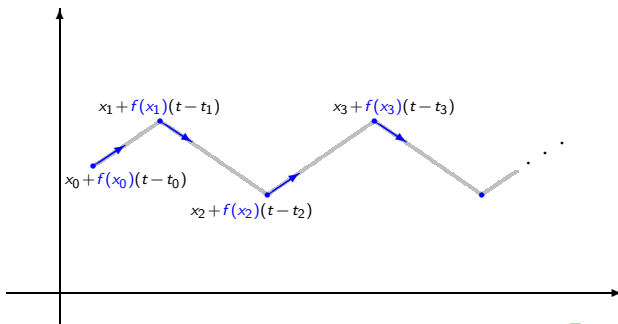
- ϕ_ϵ é contínua,
- $\phi_\epsilon(t_0) = x_0$ e, em $[t_0, t_1]$, linear com direção $f(t_0, x_0)$,
- em $[t_1, t_2]$, seja ϕ_ϵ linear com direção $f(t_1, \phi_\epsilon(t_1))$ e,
- indutivamente, construímos $\phi_\epsilon(t)$ em $B_{aA}(x_0)^-, t \in [t_0, t_0 + a].$

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x_1 = x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0),$$

$$\phi_\epsilon(t) = x_1 + f(t_1, x_1)(t - t_1), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad x_2 = x_1 + f(t_1, x_1)(t_2 - t_1),$$

$$\phi_\epsilon(t) = x_2 + f(t_2, x_2)(t - t_2), \quad t_2 \leq t \leq t_3, \quad x_3 = x_2 + f(t_2, x_2)(t_3 - t_2) \cdots$$

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_i, x_i)(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$



Se $t < t'$, sejam $0 \leq i \leq i' \leq n$ tais que

$$\phi_\epsilon(t') = x_0 + \sum_{j=0}^{i'-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_{i'}, x_{i'})(t' - t_{i'}), \quad t' \in [t_{i'}, t_{i'+1}]$$

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_i, x_i)(t - t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ e}$$

$$|\phi_\epsilon(t') - \phi_\epsilon(t)| \leq A|t - t'| \text{ e } \max_{t \in [t_0, t_0+a]} |\phi_\epsilon(t)| \leq aA, \text{ pois}$$

$$|\phi_\epsilon(t') - \phi_\epsilon(t)| = \left| f(t_i, x_i)(t_{i+1} - t) + \sum_{j=i+1}^{i'-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_{i'}, x_{i'})(t' - t_{i'}) \right|$$

Logo, $\{\phi_\epsilon : 0 < \epsilon \leq 1\} \subset C([t_0, t_0 + a], B_{aA}^-(x_0))$ é equicontínua e limitada.

Se $\epsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, do Teorema de Arzelá-Ascoli, $\{\phi_{\epsilon_n}\}$ tem subsequência convergente com limite ϕ em $C([t_0, t_0 + a], B_{aA}(x_0)^-)$.

Provemos que $\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$. Fixado $\epsilon > 0$ e $t \in [t_0, t_0 + a]$,

$t \in [t_j, t_{j+1}]$, para algum $0 \leq j \leq n$. Como $\phi_\epsilon(t) = \phi_\epsilon(t_j) + f(t_j, x_j)(t - t_j)$

$$|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t_j)| < A|t - t_j| < A \frac{\delta}{A} = \delta.$$

Isto implica que

$$|f(t_j, \phi_\epsilon(t_j)) - f(t, \phi_\epsilon(t))| < \epsilon, \quad t_j < t < t_{j+1}.$$

Agora escrevemos

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \underbrace{\sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, \phi_\epsilon(t_j)) ds + \int_{t_i}^t f(t_i, \phi_\epsilon(t_i)) ds}_{\sum_{j=0}^{i-1} f(t_j, x_j)(t_{j+1} - t_j) + f(t_i, x_i)(t - t_i)}$$

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds + \sum_{j=0}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \underbrace{[f(t_j, \phi_\epsilon(t_j)) - f(s, \phi_\epsilon(s))]}_{\|\cdot\| < \epsilon} ds \quad (1)$$

$$+ \int_{t_i}^t \underbrace{[f(t_i, \phi_\epsilon(t_i)) - f(s, \phi_\epsilon(s))]}_{\|\cdot\| < \epsilon} ds + \int_{t_0}^t [f(s, \phi_\epsilon(s)) - f(s, \phi(s))] ds.$$

Segue de (1) que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Logo ϕ é uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ passando por (t_0, x_0) e definida em $[t_0, t_0 + a]$. Um argumento semelhante pode ser aplicado para $[t_0 - a, t_0]$. \square