Espaços Métricos
Espaços Métricos Compactos - Propriedades
Aula 21

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

09 de Novembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Lema do recobrimento de Lebesgue

Definição (Número de Lebesgue)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.
Dada uma cobertura aberta $\{G_i : i \in I\}$ de X, se $r > 0$ for tal que, cada subconjunto de X com diâmetro menor que r estiver contido em G_j, para algum $j \in I$, a será camado um número de Lebesgue para a cobertura $\{G_i : i \in I\}$.

Proposição (Lema do Recobrimento de Lebesgue)

Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, toda cobertura aberta de X terá um número de Lebesgue.

Prova Seja $\{G_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de X. Se todo subconjunto de X está contido em algum G_i, $i \in I$, acabamos.

Se não, considere a coleção $\mathcal{A} := \{A \subset X : A \not\subset G_i, \forall i \in I\}$ e seja $a := \inf\{\mathrm{diam}(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Se $a > 0$ acabamos.

Mostremos, por redução ao absurdo, que $a > 0$. Se não for este o caso, existirá $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{diam}(A_n) < \frac{1}{n}$. Seja $x_n \in A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Como $\{x_n\}$ tem uma subseqüência convergente, já vamos assumir que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como $x \in G_{i_x}$ para algum $i_x \in I$ e G_{i_x} é aberto, existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset G_{r_x}$.

Tomando $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_x} < \frac{r_x}{2}$ e $\rho(x_{n_x}, x) < \frac{r_x}{2}$ temos que $A_{n_x} \subset G_{i_x}$ e isto contradiz o fato de $A_{n_x} \in \mathcal{A}$. $\square$

Estes resultado permite concluir que

Corolário

Se (X, ρ) for métrico compacto, toda cobertura aberta de X terá um refinamento formado por bolas abertas de mesmo raio.

Propriedade da Interseção Finita

Teorema

Dada uma coleção $\{F_i : i \in I\}$ de subconjuntos fechados de um espaço métrico compacto X tal que, $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \varnothing$ sempre que $J \subset I$ for finito, então $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.

Prova: De fato, se $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$ então, $\bigcup_{i\in I} F_i^c = X$. Como X é compacto $\{F_i^c : i \in\}$ tem uma subcombertura finita.

Ou seja, existe um conjunto finito $J \subset I$ tal que $\bigcup_{j\in J} F_j^c = X$ ou, equivalentemente, $\bigcap_{j\in J} F_j = \varnothing$, o que contradiz a nossa hipótese. $\square$

Compacidade como invariante topológico

Proposição

Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, (Y, σ) um espaço métrico e $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora então, (Y, σ) será um espaço métrico compacto.

Prova: Dada uma cobertura aberta $\{\mathcal{O}_i : i \in I\}$ de Y, $\{f^{-1}(\mathcal{O}_i) : i \in I\}$ é uma cobertura aberta de X.

Da compacidade de X, $\{f^{-1}(\mathcal{O}_i) : i \in I\}$ tem uma subcobertura $\{f^{-1}(\mathcal{O}_j) : j \in J\}$, $J \subset I$ finito. Logo $\{\mathcal{O}_j : j \in J\}$ é uma subcobertura finita de $\{\mathcal{O}_i : i \in I\}$. Isto mostra que Y é compacto. $\square$

Exercício

Se $(X,\rho),(Y,\sigma)$ *forem espaços métricos compactos e* $f:X\to Y$ *uma função contínua e bijetora então,* f *será um homeomorfismo.*

Exercício

Se (X,ρ) *for métrico e* $F, G\subset X$ *compactos não vazios com* $F\cap G=\varnothing$, *mostre que existem* $f\in F$ *e* $g\in G$ *tais que* $\operatorname{dist}(F,G)=\rho(f,g)>0$.

Proposição

Se (X,ρ) *for métrico compacto,* (Y,σ) *for métrico e* $f:X\to Y$ *for uma função contínua então,* f *será uniformemente contínua.*

Prova: Se não, existirá um $\epsilon > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, poderemos encontrar $x, x' \in X$ com $\rho(x, x') < \delta$ e $\sigma(f(x), f(x')) \geq \epsilon$.

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sigma(f(x_n), f(x'_n)) \geq \epsilon.$$

Como X é compacto, existem subseqüências convergentes $x_{n_k}, x'_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$. Isto contradiz a continuidade de f em x. $\square$

Produto Cartesiano de Compactos

Segue imediatamente de resultados anteriores que

Teorema (Tychonoff)

Sejam $N \in \mathbb{N}^*$ e (X_i, ρ_i), $1 \leqslant i \leqslant N$, espaços métricos compactos.

Então $\left(\prod_{i=1}^{N} X_i, \pi_p\right)$ é um espaço métrico compacto.

Vamos agora considerar produtos infinitos de métricos compactos.

Se (X_i, ρ_i), $i \in \mathbb{N}^*$ for uma seqüência de espaços métricos e

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi\right)$$

for o espaço métrico das seqüências $z = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$,

com $x_i \in X_i$, $i \in \mathbb{N}^*$ e, se $z, z' \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$,

$$\pi(z, z') = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, x_i')}{1 + \rho_i(x_i, x_i')}.$$

Exercício

Mostre que $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ é um espaço métrico.

De modo natural definimos as funções coordenadas

$$p_k : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to X_k, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

por $p_k(\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}) = x_k$.

Claramente as funções coordenadas são contínuas (exercício).

Proposição

Se (X_i, ρ_i), $i \in \mathbb{N}^*$, *e* (Y, σ) *forem espaços métricos, uma função* $f : Y \to \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *será contínua se, e somente se,* $f_k = p_k \circ f : Y \to X_k$ *for contínua, para cada* $k \in \mathbb{N}^*$.

Prova: Basta mostrar que se $f_k = p_k \circ f : Y \to X_k$ for contínua, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, então $f : Y \to \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ será contínua. A outra implicação é óbvia.

Se $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, então $p_k(\underbrace{f(y_n)}_{z_n}) = p_k(z_n) = p_k(\underbrace{\{x_1^n, x_2^n, x_3^n, \cdots\}}_{z_n}) = x_k^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_k = p_k(\underbrace{f(y)}_{z})$.

Se $z = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\} = f(y)$, mostremos que $f(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$.

De fato: dado $\epsilon > 0$, seja $K \in \mathbb{N}^*$ tal que $\displaystyle\sum_{i=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\epsilon}{2}$ e seja

$\hat{N} \in \mathbb{N}^*$ tal que $\dfrac{\rho_i(x_i^n, x_i)}{1+\rho_i(x_i^n, x_i)} < \dfrac{\epsilon}{2}$, $n \geqslant \hat{N}$, $1 \leqslant i \leqslant K$.

Desta forma, para $n \geqslant \hat{N}$,

$$\pi(z_n, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i^n, x_i)}{1+\rho_i(x_i^n, x_i)} \leqslant \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i^n, x_i)}{1+\rho_i(x_i^n, x_i)} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square$$

Proposição

Sejam (X_i, ρ_i), $i \in \mathbb{N}^*$, espaços métricos e $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ o seu produto. Então, $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ será compacto se, e somente se, (X_i, ρ_i) for compacto, para cada $i \in \mathbb{N}^*$.

Prova: Basta mostrar que, se (X_i, ρ_i) for compacto, $i \in \mathbb{N}^*$ então, $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ será compacto. A outra implicação é imediata.

Seja $\{z_n\}$ uma seqüência em $Z = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Então, $z_n = \{x_n^1, x_n^2, x_n^3, \cdots\} =: \{x_n^k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, com $x_n^k \in X_k$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

- Seja $N_1 \subset \mathbb{N}$ um conjunto infinito tal que $x_n^1 \overset{N_1 \ni n \to \infty}{\longrightarrow} x_1 \in X_1$.
- Se $N_{j-1} \subset N_{j-2} \subset \cdots \subset N_1 \subset \mathbb{N}$ são infinitos e, para $1 \leqslant i \leqslant j-1$, $x_n^i \overset{N_i \ni n \to \infty}{\longrightarrow} x_i \in X_i$, seja $N_j \subset N_{j-1}$ infinito com $x_n^j \overset{N_j \ni n \to \infty}{\longrightarrow} x_j \in X_j$.
- Escolhento n_k como o $k-$ésimo elemento de N_k temos que $x_{n_k}^j \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} x_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.
- Agora da continuidade da identidade de Z nele mesmo e do teorema anterior, $z_{n_k} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} z := \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. $\square$

Lema de Urysohn

A seguir usamos a seguinte versão elementar do Lema de Urysohn.

Lema (Lema de Urysohn)

Seja (X, d) um espaço métrico, $U \subset X$ um aberto e $K \subset U$ um compacto. Então existe uma função contínua $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_U$.

Prova: Basta tomar

$$f(x) = \frac{d(x, U^c)}{d(x, U^c) + d(x, K)}. \square$$

Separabilidade

Definição

Diremos (X, ρ) será um espaço métrico separável se existir um conjunto enumerável $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\} \subset X$ tal que $A^- = X$.

Proposição

Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto então, (X, ρ) será um espaço métrico separável.

Prova: Basta notar que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $N_n \in \mathbb{N}^*$ e $x_i^n \in X$, $1 \leqslant i \leqslant N_n$, tal que $X = \bigcup_{i=1}^{N_n} B_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$.

O conjunto $\{x_i^n : 1 \leqslant i \leqslant N_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ é enumerável e denso. □

O Teorema de Mazur

Nesta seção $(X, \|\cdot\|_X)$ será um espaço vetorial normado.

Recorde que $C \subset X$ é convexo, se somente se,

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\} \subset C \text{ sempre que } x, y \in C.$$

Exercício

Mostre que a interseção qualquer de convexos é convexa.

Definição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$.

Definimos a envoltória convexa de K por

$$\mathrm{co}K = \bigcap \{C \subset X : C \textit{ é convexo e } C \supset K\}$$

Proposição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$ convexo.

Então,

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ e \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Prova: É claro que

$$K \subset \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*, \ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Seja

$$K_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Mostremos, por indução, que $K_n \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

É claro que $K_1 \subset K$.

Suponha que, para $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $K_j \subset K$ e mostremos que $K_n \subset K$.

Seja $k \in K_n$, isto é, $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i$, com $k_i \in K$, $\alpha_i \in [0,1]$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Se $\alpha_j = 0$, para algum $1 \leqslant j \leqslant n$, acabamos.

Se $\alpha_i \neq 0$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, defina $0 < \beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i < 1$.

Assim, $\alpha_n = 1 - \beta$ e

$$\hat{k} := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\beta} k_i \in K \quad \text{e} \quad k_n \in K.$$

Da convexidade de K temos que

$$k = \beta \hat{k} + (1 - \beta) x_n \in K. \qquad \square$$

Exercício

Mostre que o fecho de um conjunto convexo é convexo.

Proposição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$. Então,

$$\mathrm{co}K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*, \ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n, \ e \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Prova: Para verificar que o conjunto

$$\hat{K} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*, \ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n, \ \text{e} \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

é convexo tomamos dois elementos $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i$ e $x' = \sum_{i=1}^{n'} \alpha'_i k'_i$ de $\hat{K}$ e notamos que, se $\beta \in [0,1]$, $\beta x + (1-\beta)x' \in \hat{K}$ (exercício). Logo $K \subset \mathrm{co}K \subset \hat{K}$.

Do teorema anterior, um convexo que contenha K deve também conter $\hat{K}$. Logo $\mathrm{co}K = \hat{K}$ e o resultado está demonstrado. $\square$

Definição

Chamaremos $\overline{\mathrm{co}}K := (\mathrm{co}K)^-$ *de envoltória convexa fechada de* K.

Exercício

Mostre que $\overline{\mathrm{co}}K = \bigcap\{F \subset X : F$ *é convexo e* $F = F^- \supset K\}$.

Proposição (Teorema de Mazur)

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ *for um espaço vetorial normado e* $K \subset X$ *for totalmente limitado então,* $\mathrm{co}K$ *será totalmente limitada.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ dado. Fixe $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ e $k_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant n_\epsilon$, tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k_i)$. Se $K_\epsilon = \mathrm{co}\{k_1, \cdots, k_{n_\epsilon}\}$. Da Proposição 8 (completando com zeros as somas com menos de n_ϵ somandos)

$$K_\epsilon = \left\{ \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i k_i : \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n_\epsilon, \text{ e } \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i = 1, \right\}.$$

Note que $f : S_{n_\epsilon} \to X$, $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_\epsilon}) = \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i k_i$ é contínua e

$$S_{n_\epsilon} = \left\{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_\epsilon}) \in [0,1]^{n_\epsilon} : \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i = 1 \right\}$$

é compacto (exercício). Como $f(S_{n_\epsilon}) = K_\epsilon$, K_ϵ é compacto.

Note que $\{B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k_\epsilon) : k_\epsilon \in K_\epsilon\}$, como cobertura de K_ϵ, tem uma subcobertura finita $\{B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k^i_\epsilon) : 1 \leqslant i \leqslant m_\epsilon\}$.

Segue que $\{B^X_{\epsilon}(k^i_\epsilon) : 1 \leqslant i \leqslant m_\epsilon\}$ cobre $\mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K_\epsilon) = \mathrm{co} \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k_i)$ que contém $\mathrm{co} K$. $\square$

Corolário

Se X for um espaço de Banach e $K \subset X$ for um conjunto compacto então, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ será compacto.

Interseção de compactos e conexos

Teorema

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. Se $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ for uma seqüência decrescente de conjuntos não vazios, fechados e conexos de X então, a interseção $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ será não vazia e conexa.

Prova: Sabemos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ é não vazia e compacta. Suponha que $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ não seja conexa.

Se A e B forem fechados, disjuntos, não vazios e $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = A \cup B$, sejam U e V abertos disjuntos tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

Faça $F_i = M_i \setminus (U \cup V)$. Então $\{F_i\}$ é uma seqüência encaixada de compactos cuja interseção é vazia e portanto, algum $F_i = \varnothing$.

Isto é $M_i \subset U \cup V$. Contudo, M_i intersepta ambos U e V, pois $M_i \supset A \cup B$. Como M_i é conexo, isto é uma contradição. $\square$

Não é verdade, em geral, que interseção infinita de conexos encaixados seja conexa.

Um exemplo simples é dado pela seguinte coleção de conexos

$$\left\{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0\}:-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{1}{n}\leqslant y\leqslant\frac{1}{n}\right\},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$