Espaços Métricos
Espaços Métricos Completos:
Teorema da Função Inversa
Espaços Métricos Compactos
Aula 20

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

07 de Novembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Teorema da função implícita

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach.
Se $F\colon G \subset X \times Y \to Y$ for uma função continuamente diferenciável em um aberto G de $X \times Y$ e $(x_0, y_0) \in G$.

Teorema (da função implícita)

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *espaços de Banach,* $G \subset X \times Y$ *um aberto e* $(x_0, y_0) \in G$*. Se*

(h_1) $F : G \to Y$ *for continuamente diferenciável,*

(h_2) $F(x_0, y_0) = 0$ *e* $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y)$ *for um isomorfismo*

então,

(t_1) *Dado* $\epsilon > 0$*, existirão* $0 < \delta \leqslant \epsilon$ *e* $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ *contínua tal que* $(x, y(x)) \in G$ *e* $F(x, y(x)) = 0$*, para todo* $x \in B_\delta^X(x_0)$.

(t_2) $y : B_\delta(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ *será continuamente diferenciável e*

$$\partial y(x) = -[\partial_y F(x, y(x))]^{-1} \partial_x F(x, y(x)), \ \forall x \in B_\delta^X(x_0).$$

Teorema (da função inversa)

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ *um espaço de Banach,* $G = G^o \subset X$ *e* $x_0 \in G$. *Se*

(h_1) $F : G \to X$ *for continuamente diferenciável e*

(h_2) $\partial F(x_0) \in \mathcal{L}(X)$ *for um isomorfismo*

então,

(t_1) *existirão abertos* $x_0 \in U \subset G$ *e* $F(x_0) \in V \subset F(G)$ *e função contínua* $\tilde{F} : V \to U$ *tal que* $\tilde{F} \circ F(x) = x$, *para todo* $x \in U$ *e* $F \circ \tilde{F}(y) = y$ *para todo* $Y \in V$.

(t_2) $\tilde{F} : V \to U$ *será continuamente diferenciável e*

$$\partial \tilde{F}(y) = [\partial F(\tilde{F}(y))]^{-1}.$$

Prova:

Basta considerar a função $H(x,y)=x-F(y)$, observar que

(a) H é continuamente diferenciável em $X \times G \subset X \times X$

(b) $H(F(x_0),x_0) = 0$ e $\partial_y H(F(x_0),x_0) = -\partial F(x_0) \in \mathcal{L}(X)$ é um isomorfismo.

e aplicar o Teorema da função implícita. $\square$

Espaços Métricos Compactos

Definição e Primeiros Resultados

Vamos começar este capítulo com algumas definições e resultados gerais que nos levarão à definição de um espaço métrico compacto.

Fixemos um espaço métrico (X, ρ) e $E \subset X$.

Definição (Recobrimento ou Cobertura)

*Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ for uma família de subconjuntos de X tal que $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, diremos que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ será uma **cobertura** de E.*

Definição (Refinamento e Subcobertura)

Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma cobertura de E,

- *Um* **refinamento** *de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura $\{W_\beta\}_{\beta\in B}$ de E tal que, para cada $\beta\in B$ existe $\alpha_\beta\in A$ tal que $W_\beta\subset V_{\alpha_\beta}$.*
- *Uma* **sub-cobertura** *de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$, é uma nova cobertura $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ de E com $A'\subset A$.*

Conjuntos Totalmente Limitados

Definição (Conjuntos Totalmente Limitados)

Se (X,ρ) for um espaço métrico, diremos que $E \subset X$ será totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, puder ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ.

Observação

É claro que todo conjunto totalmente E limitado é limitado.

E pode ser limitado e não ser totalmente limitado.

Se E for totalmente limitado então, E^{-} será totalmente limitado.

Caracterizações

Teorema

Se (X, ρ) for um espaço métrico e $E \subset X$, serão equivalentes:

a) *E é completo e totalmente limitado.*

b) **(A propriedade de Bolzano-Weierstrass)**
Toda seqüência em E tem subseqüência convergente em E.

c) **(A propriedade de Heine-Borel)**
Toda cobertura aberta de E tem subcobertura finita.

Prova: Mostraremos que: a) e b) são equivalentes, que a) e b) juntos implicam c) e que c) implica b).

a) implica b): Suponha a) e seja $\{x_n\}$ uma seqüência em E.

E pode ser coberto por um número finito de bolas de raios $\frac{1}{2}$ e pelo menos uma dessas bolas (B_1) deve conter 'infinitos' x_n .
Digamos que $x_n \in B_1$, para $n \in N_1$, $N_1 \subset \mathbb{N}$ infinito.

$E \cap B_1$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\frac{1}{2^2}$ e portanto uma dessas bolas (B_2) contém 'infinitos' x_n, $n \in N_1$.
Digamos que $x_n \in B_2$, para $n \in N_2 \subset N_1$ infinito.

Indutivamente, obtemos uma seqüência de bolas B_j de raio $\frac{1}{2^j}$ e uma seqüência decrescente de subconjuntos infinitos N_j de $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_j$ para $n \in N_j$. Escolha $n_k \in N_k$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$

Então $\{x_{n_j}\}$ é de Cauchy pois, $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < \frac{2}{2^j}$ sempre que $k > j$ e, como E é completo, o limite dessa subseqüência pertence a E.

b) implica a): Mostraremos que se qualquer das condições em a) falhar então b) falhará.

Se E não é completo, seja $\{x_n\}$ uma de Cauchy em E que não é convergente em E. Nenhuma subseqüência de $\{x_n\}$ pode convergir em E, caso contrário, a seqüência seria convergente em E.

Se E não é totalmente limitado, seja $\epsilon > 0$ tal que E não pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. Escolha $x_n \in E$ indutivamente da seguinte maneira.

Comece com qualquer $x_1 \in E$ e tendo escolhido $x_1, \ldots, x_n$ escolha $x_{n+1} \in E \backslash \cup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$. Então $\rho(x_n, x_m) \geqslant \epsilon$ para todo m, n e portanto $\{x_n\}$ não tem subseqüência convergente.

a) e b) implicam c):

Basta mostrar que, se b) [a)] vale e $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura de E por conjuntos abertos, existe $\epsilon > 0$ tal que toda bola de raio ϵ que intersepta E está contida em algum V_α, pois E pode ser coberto por um número finito de tais bolas de a).

Suponha que não; isto é, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma bola B_n de raio $1/2^n$ tal que $B_n \cap E \neq \varnothing$ e B_n não está contida em nenhum V_α. Escolha $x_n \in B_n \cap E$.

Passando para uma subseqüência podemos assumir que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in E$. Temos que $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in A$ e como V_α é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$.

Mas para $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n, x) < \frac{\epsilon}{3}$ e $2^{-n} < \frac{\epsilon}{3}$, $B_n \subset B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$, contradizendo a escolha de B_n.

c) implica b) Se $\{x_n\}$ for uma seqüência sem subseqüência convergente, para cada $x \in E$ existirá uma bola B_x, centrada em x, que contém x_n para, no máximo, um número finito de índices n (caso contrário haveria uma subseqüência que converge para x).

Então $\{B_x\}_{x \in E}$ é uma cobertura de E por abertos que não possui subcobertura finita. $\square$

Definição de Compacidade

Definição (Compacidade)

Em um espaço métrico (X, ρ), um conjunto $E \subset X$ é dito compacto se tem as propriedades a)-c) do teorema anterior e é dito relativamente compacto se E^- é compacto.

Todo conjunto relativamente compacto é limitado, a recíproca é falsa, em geral, mas é verdadeira em $\mathbb{R}^n$ como veremos a seguir.

Todo conjunto compacto é fechado e limitado, a recíproca é falsa, em geral, mas vale em $\mathbb{R}^n$ como mostra a proposição abaixo.

Primeiros Resultados

Proposição (Caracterização dos Compactos de $\mathbb{R}^n$)

Todo subconjunto fechado e limitado de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *é compacto.*

Prova: Como subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ são completos, é suficiente mostrar que subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ são totalmente limitados.

Como cada subconjunto limitado está contido num cubo da forma

$$Q = [-R, R]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leqslant R\},$$

é suficiente mostrar que Q é totalmente limitado.

Dado $\epsilon > 0$, escolha um inteiro $k > R\sqrt{n}/\epsilon$ e expresse Q como a união de k^n cubos congruentes dividindo o intevalo $[-R, R]$ em k intervalos iguais.

O lado desses subcubos e $2R/k$ e portanto o seu diâmetro é $\sqrt{n}(2R/k) < 2\epsilon$ e portanto cada um desses subcubos está contido na bola de raio ϵ com centro coincidente com o centro do cubo. $\square$

Da definição de compacto

Proposição (Compactos são completos)

Se (X, ρ) for métrico compacto então, (X, ρ) será completo.

Consequentemente,

Todo fechado de um métrico compacto será compacto e

todo compacto de um espaço métrico qualquer será fechado.

Funções definidas espaços métricos compactos e tomando valores em $\mathbb{R}$ assumem seus valores extremos.

Proposição (Teorema de Weierstrass)

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ para todo $x \in X$.

Prova: Seja $m_1 = \inf_{x \in X} f(x)$ e $m_2 = \sup_{x \in X} f(x)$ $(m_1, m_2 \in [-\infty, \infty])$.

Sejam $\{x_n^1\}$ e $\{x_n^2\}$ tais que $f(x_n^1) \xrightarrow{n \to \infty} m_1$ and $f(x_n^2) \xrightarrow{n \to \infty} m_2$.

Como (X, ρ) é compacto, existem $x_1, x_2 \in X$ e $N \subset \mathbb{N}$ infinito tais que $x_n^i \xrightarrow{N \ni n \to \infty} x_i$, $i = 1, 2$ e assim, $f(x_1) = m_1 \leqslant f(x) \leqslant m_2 = f(x_2)$ para todo $x \in X$. $\square$