Espaços Métricos
Espaços Métricos Compactos - Teorema de Baire
Dimensão Topológica e o Teorema de Imersão
Aula 20

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

18 de Novembro de 2020

Segundo Semestre de 2020

Partição da Unidade

Definição (Partição da Unidade)

Seja X um espaço métrico e $\{U_1, \cdots, U_n\}$ uma cobertura aberta de X. Diremos que uma família $\{\phi_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset C(X, [0,1])$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$ se

$$\mathrm{supp}(\phi_i) = \{x \in X : \phi_i(x) > 0\}^- \subset U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1, \text{ para todo } x \in X.$$

Teorema (Partição da Unidade)

Seja $\{U_1,\cdots,U_n\}$ cobertura aberta de um métrico compacto (X,ρ).

Então existe uma partição da unidade subordinada a $\{U_1,\cdots,U_n\}$.

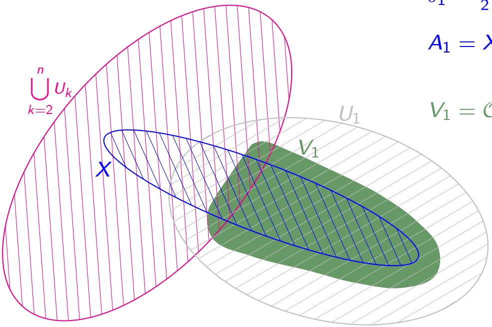
Prova: Podemos escolher coberturas abertas $\{V_1,\cdots,V_n\}$ e $\{W_1,\cdots,W_n\}$ de X tais que $W_i\subset\overline{W}_i\subset V_i\subset\overline{V}_i\subset U_i$, $1\leqslant i\leqslant n$.

Basta escolher $V_1=\mathcal{O}_{\delta_1}(A_1)$ onde

$$A_1=X\setminus\bigcup_{k=2}^{n}U_k \quad \text{e} \quad \delta_1=\frac{1}{2}\,d(A_1,X\setminus U_1).$$

Considere a cobertura $\{V_1,U_2,\cdots,U_n\}$ e prossiga por indução.

Exatamente da mesma forma obtemos $\{W_1,\cdots,W_n\}$.



$$\delta_1 = \frac{1}{2}\, d(A_1, X \backslash U_1).$$

$$A_1 = X \backslash \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{n} U_k$$

$$V_1 = \mathcal{O}_{\delta_1}(A_1)$$

Seja

$$\psi_i(x) = \frac{d(x, X \backslash V_i)}{d(x, W_i) + d(x, X \backslash V_i)}.$$

Claramente $\psi_i : X \to [0,1]$ é contínua, $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset \overline{V}_i \subset U_i$,

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \geq 1, \text{ para todo } x \in X$$

e $\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$ com $\phi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\Psi(x)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, é uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, \cdots, U_n\}$. $\square$

Dimensão Topológica

Definição (Dimensão Topológica)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Diremos que X terá **dimensão topológica** *finita se, e somente se,*

- *existir um natural n tal que, qualquer cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X tenha um refinamento $\mathcal{U}'$ para o qual, cada ponto de X pertença a no máximo $n+1$ subconjuntos de $\mathcal{U}'$.*

Neste caso, diremos que $\mathcal{U}'$ tem ordem $n+1$. A **dimensão topológica** $\dim(X)$ *de X é o mínimo n com esta propriedade.*

Este conceito tem a propriedade de que a dimensão de qualquer subconjunto compacto com interior não vazio de $\mathbb{R}^n$ é n e,

Teorema

Se (X, ρ) for métrico compacto com dimensão topológica finita então, X será homeomorfo a algum subconjunto de $\mathbb{R}^{2\dim(X)+1}$.

Este teorema é devido a G. Nöbeling (1931) (veja referência abaixo) e será provado a seguir usando o **Teorema de Baire**.

G. Nöbeling; Über eine n-dimensionale Universalmenge im $\mathbb{R}^{2n+1}$, *Math. Ann.* **104** (1) 71-80 (1931).

Além da dimensão topológica e da dimensão algébrica de espaços vetoriais, existem muitas outras noções de dimensão. Citamos por exemplo a dimensão de Hausdorff e a dimensão fractal.

Também existem outros teoremas de imersão como o Teorema de de Whitney para variedades e o Teorema de Mañé (veja referência abaixo), muito usado em sistemas dinâmicos.

Ele estabelece que um compacto K, com dimensão fractal $\dim_F(K) < \infty$, de um espaço de Banach real X, pode ser projetado injetivamente em qualquer subespaço vetorial Y de X com dimensão $\dim(Y) > 2\dim_F(K) + 1$.

R. Mañé, *On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps*, Lecture Notes in Mathematics **898** 230-242 Springer-Verlag, New York, 1981.

Definição

Diremos que o conjunto $\{z_0, \cdots, z_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ será geometricamente independente se, e somente se, $\sum_{i=0}^{k} a_i z_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$ implicar $a_i = 0$, $0 \leqslant i \leqslant k$.

É claro que $\{z_0, \cdots, z_k\}$ é geometricamente independente se, e somente se, $\{z_1 - z_0, \cdots, z_k - z_0\}$ é linearmente independente.

Definição

Um conjunto A de pontos de $\mathbb{R}^n$ estará em posição geral em $\mathbb{R}^n$ se todo subconjunto de A contendo $n+1$ ou menos pontos de A for geométricamente independente.

Teorema

Dado um conjunto finito $\{z_1, \cdots, z_\ell\}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$ existe um conjunto $\{y_1, \cdots, y_\ell\}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão em posição geral em $\mathbb{R}^n$ e tal que $\|z_i - y_i\|_\infty < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Prova: A prova é feita por indução. Faça $y_1 = z_1$ e se $\{y_1, \cdots, y_p\}$ estão em posição geral e satisfazem $\|z_i - y_i\|_\infty < \delta$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Considere y_{p+1} um ponto que não pertence a nenhum dos hiperplanos gerados por n ou menos pontos de $\{y_1, \cdots, y_p\}$ (aqui usamos o Teorema de Baire) e que diste menos que δ de z_{p+1}. Assim $\{y_1, \cdots, y_p, y_{p+1}\}$ está em posição geral. □

Teorema

Todo espaço métrico compacto de dimensão topológica m é homeomorfo a um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{2m+1}$

Prova: Terminologia

Seja $N = 2m + 1$ e denote por $\mathbb{R}^N_\infty$ o espaço $\mathbb{R}^N$ com a norma $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$.

Seja $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ o espaço das funções contínuas com a norma $\|f\|_{\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N_\infty)} = \max_{x \in X} \|f(x)\|_\infty$.

Segue que $\mathbb{R}^N_\infty$ e $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ são espaços métricos completos.

Revisitado na aula 21

Estratégia da prova: Dada $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ defina

$$\Delta(f) = \sup_{z \in f(X)} \mathrm{diam}(f^{-1}(z)).$$

Note que, $\Delta(f) = 0$ se, e somente se, f é injetiva.

Observação: $\Delta(f)$ é uma medida do quanto f deixa de ser injetiva.

Dado $\epsilon > 0$, defina $U_\epsilon = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty) : \Delta(f) < \epsilon\}$. Mostraremos que U_ϵ é aberto e denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$. **Teorema de Baire**

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$$

será denso um em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ de funções injetivas.

Como X é compacto, X será homeomorfo a um compacto de $\mathbb{R}^N_\infty$.

Mostremos que U_ϵ é aberto em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$.

Dado $f \in U_\epsilon$ escolha $b \in (\Delta(f), \epsilon)$.

Note que, se $f(x) = f(y) = z$, $\{x, y\} \subset f^{-1}(z)$ e $d(x, y) < b$.

Segue que, se $F = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \geq b\}$, F é compacto e $X \times X \ni (x, y) \mapsto \|f(x) - f(y)\|_\infty \in \mathbb{R}^+$ é positiva em F.

Seja $\delta = \frac{1}{2} \min\{\|f(x) - f(y)\|_\infty : (x, y) \in F\}$.

Se $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ é tal que $\sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \delta$, para $(x, y) \in F$ temos que $\|f(x) - f(y)\|_\infty \geq 2\delta$ e $\|g(x) - g(y)\|_\infty > 0$.

Logo, $g(x) = g(y)$ implica que $d(x, y) < b$ e portanto $\Delta(g) \leqslant b < \epsilon$.

Segue que $g \in U_\epsilon$ e U_ϵ é aberto.

Mostremos que U_ϵ é denso em $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$.

Seja $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N_\infty)$ e $\epsilon > 0$ fixo.

Dado $\delta > 0$, mostremos $\sup_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|_\infty < \delta$, para algum $g \in U_\epsilon$.

Construção da cobertura e partição da unidade:

Considere uma cobertura $\{U_1, \cdots, U_n\}$ de X tal que

- $\mathrm{diam}\, U_i < \frac{\epsilon}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant n$,
- $\mathrm{diam}\, f(U_i) < \frac{\delta}{2}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e
- $\{U_1, \cdots, U_n\}$ tem ordem $m + 1$.

Seja $\{\phi_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_1, \cdots, U_n\}$.

Construção da aproximação:

Para cada i, escolha $x_i \in U_i$ e $z_i \in \mathbb{R}^N$ tal que $z_i \in B_{\frac{\delta}{2}}(f(x_i))$ e de forma que $\{z_1, \cdots, z_n\}$ está em posição geral em $\mathbb{R}^N$. Finalmente defina $g : X \to \mathbb{R}^N$ por

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) z_i.$$

Prova que $\sup_{x\in X}\|f(x)-g(x)\|_\infty<\delta$:

$$g(x)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)(z_i-f(x_i))+\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)(f(x_i)-f(x)).$$

Da escolha de x_i e z_i temos que $\|z_i-f(x_i)\|_\infty<\frac{\delta}{2}$.

Como $\phi_i(x)\neq 0$ implica $x\in U_i$, como $\mathrm{diam}(f(U_i))<\frac{\delta}{2}$; isto é,

$\|f(x_i)-f(x)\|_\infty<\frac{\delta}{2}$ sempre que $x\in U_i$ e como $\sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)=1$

para todo $x\in X$ temos que $\|g(x)-f(x)\|<\delta$ para todo $x\in X$.

Logo, $\sup_{x\in X}\|f(x)-g(x)\|_\infty<\delta$.

Prova que a aproximação está em U_ϵ:

Para ver que $g \in U_\epsilon$ mostraremos que, $g(x) = g(y)$ implica que $x, y \in U_i$, para algum $1 \leqslant i \leqslant n$. Assim, necessariamente, $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$ e consequentemente $\Delta(g) \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Suponha que $g(x) = g(y)$. Então $\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)]z_i = 0$.

Do fato que a cobertura $\{U_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ tem ordem $m+1$, no máximo $m+1$ dos $\phi_i(x)$ (e dos $\phi_i(y)$) são não nulos. Logo, a soma $\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)]z_i = 0$ tem no máximo $2m+2$ parcelas não nulas e que $\sum_{i=1}^{n}[\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 0$.

Como os z_i estão em posição geral, qualquer subconjunto de $N+1$ ou menos elementos são geométricamente independentes.

Como $N+1=2m+2$ devemos ter que $\phi_i(x)=\phi_i(y)$, para $1\leqslant i\leqslant n$.

Daí, para algum $1\leqslant j\leqslant n$, $\phi_j(x)=\phi_j(y)>0$ e $x,y\in \mathrm{supp}(\phi_j)\subset U_j$.

Como $x,y\in U_j$, segue que $\Delta(g)<\epsilon$. $\square$