Espaços Métricos Completos
Princípio da Contração de Banach
Teoremas das Funções Implícita e Inversa
Aula 19

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

31 de Outubro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Derivada de Frechét

Definição (Derivada de Frechét)

Sejam $(Z, \|\cdot\|_Z)$ *e* $(W, \|\cdot\|_W)$ *espaços de Banach,* $G \subset Z$.

Uma função $F : G \to W$ *será Frechét diferenciável em* $z_0 \in G^o$

se, e somente se, existir $\partial F(z_0) \in \mathcal{L}(Z, W)$ *tal que*

$$\frac{\|F(z) - F(z_0) - \partial F(z_0)(z - z_0)\|_W}{\|z - z_0\|_Z} \stackrel{z \to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

O operador $\partial F(z_0)$ *será chamado Derivada de Frechét de* F *em* z_0.

Definição (Funções Continuamente Diferenciáveis)

Se F for diferenciável em todos os pontos de $G \subset Z$, a função

$$G \ni z \mapsto \partial F(z) \in \mathcal{L}(Z, W), \text{ denotada por } \partial F,$$

será chamada de função derivada de Frechét.

Diremos que F será continuamente diferenciável em G se for diferenciável em todos os pontos de G e $\partial F : G \to \mathcal{L}(Z, W)$ for contínua.

Note que, se $F : G \subset Z \to W$ for continuamente diferenciável e $z_1, z_2 \in G$ forem tais que $\{z(t) = tz_1 + (1-t)z_2 : t \in (a,b)\} \subset G$ então, $(a,b) \ni t \mapsto F(z(t))$ será continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = \partial F(z(t))\,(z_1 - z_2), \quad t \in (a,b),$$

onde

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{h}.$$

Isto segue diretamente da definição de derivada de Frechét.

Derivadas Parciais

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach.

Se $F : G \subset X \times Y \to Y$ for Frechét diferenciável em $(x_0, y_0) \in G^o$,

$\partial F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X \times Y, Y)$, e

$\partial F(x_0, y_0)(h, k) = \partial F(x_0, y_0)(h, 0) + \partial F(x_0, y_0)(0, k)$.

Defina a derivada parcial com respeito a x, $\boxed{\partial_x F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Y)}$

e a derivada parcial com respeito a y, $\boxed{\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y) \text{ por}}$

$\boxed{\partial_x F(x_0, y_0)h = \partial F(x_0, y_0)(h, 0)}$ e $\boxed{\partial_y F(x_0, y_0)k = \partial F(x_0, y_0)(0, k).}$

Sendo assim,

$$\frac{\|F(x,y)-F(x_0,y_0)-\partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0)\|_Y}{\max\{\|x-x_0\|_X, \|y-y_0\|_Y\}}$$

$$= \frac{\|F(x,y)-F(x_0,y_0)-\partial F(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)\|_Y}{\max\{\|x-x_0\|_X, \|y-y_0\|_Y\}} \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

Desta forma, se

$$N(x,y)=F(x,y)-F(x_0,y_0)-\partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0)$$

então,

$$\frac{\|N(x,y)\|_Y}{\max\{\|x-x_0\|_X, \|y-y_0\|_Y\}} \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

Exemplo

Seja $(Z, \|\cdot\|_Z)$ um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(Z)$ com $\|A\|_{\mathcal{L}(Z)} < 1$.

Então $I + A$ é um isomorfismo.

De fato:

Basta ver que $I + A$ é bijetora, isto é, para cada $w \in Z$, existe um único $z \in Z$ tal que $(I + A)z = w$, ou ainda, para cada $w \in Z$, $T_w z = w - Az$ tem um único ponto fixo. Isto é imediato do fato que T_w é uma contração com constante $\kappa = \|A\|_{\mathcal{L}(Z)} < 1$. □

Exercício (*)

Seja $(Z, \|\cdot\|_Z)$ for Banach e $B_0 \in \mathcal{L}(Z)$ for um isomorfismo. Mostre que, se $\|B - B_0\|_{\mathcal{L}(Z)} < \|B_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)}^{-1}$, B será um isomorfismo.

Sugestão: $B = B_0(I + B_0^{-1}(B - B_0))$.

O Teorema da função implícita

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach.
Se $F\colon G \subset X \times Y \to Y$ for uma função continuamente diferenciável
em um aberto G de $X \times Y$ e $(x_0, y_0) \in G$.

Se $F(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y)$ for um isomorfismo, escrevendo

$$N(x, y) = F(x, y) - 0 - \partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y F(x_0, y_0)(y - y_0)$$

na forma

$$y = y_0 + (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[F(x, y) - \partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) - N(x, y)]$$

temos a forma de verificar que, para cada x próximo a x_0, existe um único y próximo a y_0 que resolve $F(x, y) = 0$.

Basta mostrar que, para cada x próximo a x_0,

$$T_x y = y_0 - (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} [\partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + N(x, y)]$$

tem um único ponto fixo.

Teorema (da função implícita)

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *espaços de Banach,* $G \subset X \times Y$ *um aberto e* $(x_0, y_0) \in G$*. Se*

(h_1) $F : G \to Y$ *for continuamente diferenciável,*

(h_2) $F(x_0, y_0) = 0$ *e* $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y)$ *for um isomorfismo*

então,

(t_1) *Dado* $\epsilon > 0$*, existirão* $0 < \delta \leqslant \epsilon$ *e* $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ *contínua tal que* $(x, y(x)) \in G$ *e* $F(x, y(x)) = 0$*, para todo* $x \in B_\delta^X(x_0)$*.*

(t_2) $y : B_\delta(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ *será continuamente diferenciável e*

$$\partial y(x) = -[\partial_y F(x, y(x))]^{-1} \partial_x F(x, y(x)), \ \forall x \in B_\delta^X(x_0).$$

Prova de (t_1):

Basta mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta \leqslant \epsilon$ tal que, a função

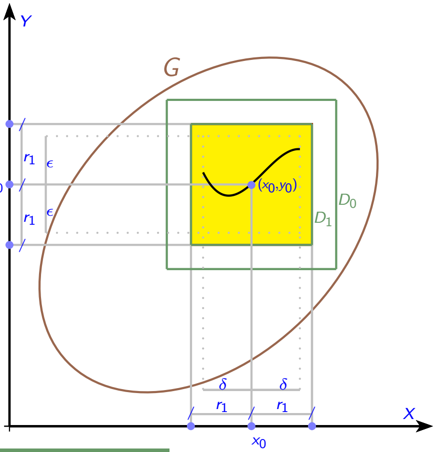
$$T_x y = y_0 - (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[\partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + N(x, y)]$$

tem um único ponto fixo $y(x) \in B_\epsilon^Y(y_0)$, para cada $x \in B_\delta^X(x_0)$.

Para $r > 0$, seja

$$D_r = \{(x, y) \in G : \|x - x_0\|_X \leqslant r \text{ e } \|y - y_0\|_Y \leqslant r\}.$$

Escolha $r_0 > 0$ tal que $D_0 = D_{r_0} \subset G$.



Seja $N : D_0 \to Y$ definido por

$$N(x,y) = F(x,y) - 0 - \partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0) - \partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Escolha $r_1 < r_0$ e tal que, sempre que $(x, y) \in D_1 := D_{r_1}$,

$$\|N(x,y)\|_Y \leqslant \frac{1}{2\|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)}} \max\{\|x - x_0\|_X, \|y - y_0\|_Y\}$$

e, sempre que $(x, y) \in D_1 := D_{r_1}$,

$$\|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)} \|\partial_y F(x,y) - \partial_y F(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Isto e o Exercício (*) implicam que $\partial_y F(x, y)$ é um isomorfismo

Se $\|y - y_0\|_Y \leqslant \epsilon \leqslant r_1$, escolha $\delta \leqslant \epsilon$ tal que

$$\delta \|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)} \|\partial_x F(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, para $\|x - x_0\|_X \leqslant \delta$

$\|T_x y - y_0\|_Y$

$$\leqslant \|(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)}[\|\partial_x F(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x - x_0\|_X + \|N(x, y)\|_Y]$$

$$\leqslant \|(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)}\|\partial_x F(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\delta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Logo, para (x, y) satisfazento $\|x - x_0\|_X \leqslant \delta$ e $\|y - y_0\|_Y \leqslant \epsilon$,

$$\|T_x y - y_0\|_Y \leqslant \epsilon,$$

ou seja, T_x leva $\bar{B}_\epsilon(y_0)$ em $\bar{B}_\epsilon(y_0)$

Mostremos que $T_x : \bar{B}_\epsilon(y_0) \to \bar{B}_\epsilon(y_0)$ é uma contração.

$$T_x y - T_x y' = -(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[N(x, y) - N(x, y')]$$

$$= -\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[F(x, y) - F(x, y') - \partial_y F(x_0, y_0)(y - y')]$$

$$= -(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\left[\int_0^1 \frac{d}{dt}[F(x, ty + (1-t)y')]dt - \partial_y F(x_0, y_0)(y - y')\right].$$

$$= -(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\int_0^1 [\partial_y F(x, ty + (1-t)y') - \partial_y F(x_0, y_0)](y - y')dt.$$

Somente nas igualdades acima a prova para espaços de Banach difere da prova para espaços euclideanos. Isto pode ser facilmente contornado pela aplicação do Teorema de Hahn-Banach.

Disto segue que,

$$\|T_x y - T_x y'\|_Y \leqslant \frac{1}{2}\|y - y'\|_Y.$$

Do Princípio da Contração de Banach, que T_x tem um único ponto fixo $y(x)$ fixo satisfazendo $\|y(x)-y_0\|_Y \leqslant \epsilon$, sempre que $\|x-x_0\|_X \leqslant \delta$.

Isto também mostra que $y : \bar{B}_\delta^X(x_0) \to \bar{B}_\epsilon^Y(y_0)$ é contínua em $x = x_0$.

Agora como $F(x, y(x)) = 0$, uma repetição do argumento nos dá também a continuidade de y em qualquer $x \in \bar{B}_\delta(x_0)$.

A prova de (t_2) segue da seguinte forma.

Primeiramente note que, $F(x+h,y(x+h))-F(x,y(x))=0$ e

$$\tilde{N}(x+h,y(x+h)) = \underbrace{F(x+h,y(x+h))-F(x,y(x))}_{=0}$$

$$-\partial_x F(x,y(x))h-\partial_y F(x,y(x))(y(x+h)-y(x)).$$

Logo, podemos escolher $\delta>0$ tal que, para todo h tal que $\|h\|_X\leqslant\delta$,

$$\|y(x+h)-y(x)\|_Y\leqslant\|\underbrace{\partial_y F(x,y(x))^{-1}}_{\text{Exercício (*)}}\partial_x F(x,y(x))h\|_Y$$

$$+\frac{1}{2}\max\{\|h\|_X,\|y(x+h)-y(x)\|_Y\}.$$

Segue que

$$\sup_{\|h\|_X\leqslant\delta}\frac{\|y(x+h)-y(x)\|_Y}{\|h\|_X}<\infty. \tag{1}$$

Como $F(x+h, y(x+h)) - F(x, y(x)) = 0$

$$\frac{\|-\partial_x F(x,y(x))h - \partial_y F(x,y(x))(y(x+h)-y(x))\|_Y}{\max\{\|h\|_X, \|y(x+h)-y(x)\|_Y\}} \xrightarrow{\|h\|_X \to 0} 0.$$

Segue de (1) que

$$\frac{\|-\partial_x F(x,y(x))h - \partial_y F(x,y(x))(y(x+h)-y(x))\|_Y}{\|h\|_X} \xrightarrow{\|h\|_X \to 0} 0$$

e, portanto,

$$\frac{\|-\partial_y F(x,y(x))^{-1}\partial_x F(x,y(x))h - (y(x+h)-y(x))\|_Y}{\|h\|_X} \xrightarrow{\|h\|_X \to 0} 0.$$

Isto mostra que $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ é diferenciável e que

$$-\partial y(x) = -\partial_y F(x, y(x))^{-1} \partial_x F(x, y(x))$$

como o lado direito da expressão acima é uma função contínua, segue que $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ é continuamente diferenciável. $\square$

Teorema (da função inversa)

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ *um espaço de Banach,* $G = G^o \subset X$ *e* $x_0 \in G$. *Se*

(h_1) $F : G \to X$ *for continuamente diferenciável e*

(h_2) $\partial F(x_0) \in \mathcal{L}(X)$ *for um isomorfismo*

então,

(t_1) *existirão abertos* $x_0 \in U \subset G$ *e* $F(x_0) \in V \subset F(G)$ *e função contínua* $\tilde{F} : V \to U$ *tal que* $\tilde{F} \circ F(x) = x$, *para todo* $x \in U$ *e* $F \circ \tilde{F}(y) = y$ *para todo* $Y \in V$.

(t_2) $\tilde{F} : V \to U$ *será continuamente diferenciável e*

$$\partial \tilde{F}(y) = [\partial F(\tilde{F}(y))]^{-1}.$$

Prova:

Basta considerar a função $H(x, y) = x - F(y)$, observar que

(a) H é continuamente diferenciável em $X \times G \subset X \times X$

(b) $H(F(x_0), x_0) = 0$ e $\partial_y H(F(x_0), x_0) = \partial F(x_0) \in \mathcal{L}(X)$ é um isomorfismo.

e aplicar o Teorema da função implícita. $\square$

Para quem viu o Teorema de Hahn-Banach

Para qualquer $w^* \in W^*$ segue, da continuidade e linearidade, que

$$\frac{d}{dt}(w^*(T(z(t))dt) = w^*(\frac{d}{dt}(T(z(t)))dt),$$

Sendo assim, para cada $w^* \in W^*$

$$w^*(T(z_1) - T(z_2)) = \int_0^1 w^*(\frac{d}{dt}(T(z(t))dt)dt$$

Recorde, do Teorema de Hahn-Banach, que existe $w^* \in W^*$,
$\|w^*\| = 1$, tal que $w^*(T(z_1) - T(z_2)) = \|T(z_1) - T(z_2)\|$.

Mostremos que $T_x : \bar{B}_\epsilon(y_0) \to \bar{B}_\epsilon(y_0)$ é uma contração. Escolhento $y^* \in Y^*$ com $\|y^*\|_{Y^*} = 1$ e $y^*(T_x y - T_x y') = \|T_x y - T_x y'\|_Y$.

$$y^*(T_x y - T_x y') = -y^*((\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[N(x, y) - N(x, y')])$$

$$= -y^*((\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[F(x, y) - F(x, y') - \partial_y F(x_0, y_0)(y - y')])$$

$$= -\int_0^1 y^*((\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[\partial_y F(x, ty + (1-t)y') - \partial_y F(x_0, y_0)](y - y'))dt.$$

Curiosidade: Se $[0,1] \ni t \mapsto f(t) \in Z$ for uma função contínua e $z^* \in Z^*$, então

$$Z^* \ni z^* \mapsto \int_0^1 \langle f(t), z^* \rangle dt \in \mathbb{K}$$

define um funcional linear contínuo $\zeta \in Z^{**}$ em K e

$$\|\zeta\|_{Z^{**}} \leqslant \int_0^1 \|f(t)\| dt.$$

Se Z for reflexivo, isto é, $Z^{**} = J(Z)$, com a isometria canônica J, e $Jz_f = \zeta$, definimos

$$z_f =: \int_0^1 f(t) dt.$$