Espaços Métricos
Espaços Métricos Compactos - Propriedades
Aula 19

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

16 de Novembro de 2020

Segundo Semestre de 2020

Propriedade da Interseção Finita

Teorema

Dada uma coleção $\{F_i : i \in I\}$ de subconjuntos fechados de um espaço métrico compacto X tal que, $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \varnothing$ sempre que $J \subset I$ for finito, então $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.

Prova: De fato, se $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$ então, $\bigcup_{i\in I} F_i^c = X$. Como X é compacto $\{F_i^c : i \in\}$ tem uma subcobertura finita.

Ou seja, existe um conjunto finito $J \subset I$ tal que $\bigcup_{j\in J} F_j^c = X$ ou, equivalentemente, $\bigcap_{j\in J} F_j = \varnothing$, o que contradiz a nossa hipótese. $\square$

Interseção de compactos e conexos

Exercício

Se (X, ρ) for métrico e $F, G \subset X$ compactos não vazios com $F \cap G = \varnothing$, mostre que existem $f \in F$ e $g \in G$ tais que $\mathrm{dist}(F, G) = \rho(f, g) > 0$.

Teorema

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. Se $\{M_i : i \in \mathbb{N}\}$ for uma seqüência decrescente de conjuntos não vazios, fechados e conexos de X então, a interseção $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ será não vazia e conexa.

Prova: Sabemos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ é não vazia e compacta. Suponha que $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ não seja conexa.

Se A e B forem fechados, disjuntos, não vazios e $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = A \cup B$, sejam U e V abertos disjuntos tais que $A \subset U$ e $B \subset V$.

Faça $F_i = M_i \setminus (U \cup V)$. Então $\{F_i\}$ é uma seqüência encaixada de compactos cuja interseção é vazia e portanto, algum $F_i = \varnothing$.

Isto é $M_i \subset U \cup V$. Contudo, M_i intersepta ambos U e V, pois $M_i \supset A \cup B$. Como M_i é conexo, isto é uma contradição. $\square$

Não é verdade, em geral, que interseção infinita de conexos encaixados seja conexa.

Um exemplo simples é dado pela seguinte coleção de conexos

$$\left\{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0\}:-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{1}{n}\leqslant y\leqslant\frac{1}{n}\right\},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

Separabilidade

Definição

Diremos (X, ρ) será um espaço métrico separável se existir um conjunto enumerável $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\} \subset X$ tal que $A^- = X$.

Proposição

Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto então, (X, ρ) será um espaço métrico separável.

Prova: Basta notar que, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $N_n \in \mathbb{N}^*$ e $x_i^n \in X$, $1 \leqslant i \leqslant N_n$, tal que $X = \bigcup_{i=1}^{N_n} B_{\frac{1}{n}}(x_i^n)$.

O conjunto $\{x_i^n : 1 \leqslant i \leqslant N_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ é enumerável e denso. $\square$

Compacidade como invariante topológico

Proposição

Se (X,ρ) for um espaço métrico compacto, (Y,σ) um espaço métrico e $f:X\to Y$ uma função contínua e sobrejetora então, (Y,σ) será um espaço métrico compacto.

Prova: Dada uma cobertura aberta $\{\mathcal{O}_i : i\in I\}$ de Y, $\{f^{-1}(\mathcal{O}_i):i\in I\}$ é uma cobertura aberta de X.

Da compacidade de X, $\{f^{-1}(\mathcal{O}_i):i\in I\}$ tem uma subcobertura $\{f^{-1}(\mathcal{O}_j):j\in J\}$, $J\subset I$ finito. Logo $\{\mathcal{O}_j:j\in J\}$ é uma subcobertura finita de $\{\mathcal{O}_i : i\in I\}$. Isto mostra que Y é compacto. $\square$

Exercício

Se $(X,\rho),(Y,\sigma)$ forem espaços métricos compactos e $f : X \to Y$ uma função contínua e bijetora então, f será um homeomorfismo.

Proposição

Se (X,ρ) for métrico compacto, (Y,σ) for métrico e $f : X \to Y$ for uma função contínua então, f será uniformemente contínua.

Prova: Se não, existirá um $\epsilon > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, poderemos encontrar $x, x' \in X$ com $\rho(x, x') < \delta$ e $\sigma(f(x), f(x')) \geq \epsilon$.

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sigma(f(x_n), f(x'_n)) \geq \epsilon.$$

Como X é compacto, existem subseqüências convergentes $x_{n_k}, x'_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x$. Isto contradiz a continuidade de f em x. $\square$

Produto Cartesiano de Compactos

Segue imediatamente de resultados anteriores que

Teorema (Tychonoff)

Sejam $N \in \mathbb{N}^*$ e (X_i, ρ_i), $1 \leqslant i \leqslant N$, espaços métricos compactos.

Então $\left(\prod_{i=1}^{N} X_i, \pi_p\right)$ é um espaço métrico compacto.

Vamos agora considerar produtos infinitos de métricos compactos.

Se (X_i, ρ_i), $i \in \mathbb{N}^*$ for uma seqüência de espaços métricos e

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi \right)$$

for o espaço métrico das seqüências $z = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$,

com $x_i \in X_i$, $i \in \mathbb{N}^*$ e, se $z, z' \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i$,

$$\pi(z, z') = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, x_i')}{1 + \rho_i(x_i, x_i')}.$$

Exercício

Mostre que $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ *é um espaço métrico.*

De modo natural definimos as funções coordenadas

$$p_k : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to X_k, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

por $p_k(\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}) = x_k$.

Claramente as funções coordenadas são contínuas (exercício).

Proposição

Se (X_i, ρ_i), $i \in \mathbb{N}^*$, *e* (Y, σ) *forem espaços métricos, uma função* $f : Y \to \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *será contínua se, e somente se,* $f_k = p_k \circ f : Y \to X_k$ *for contínua, para cada* $k \in \mathbb{N}^*$.

Prova: Basta mostrar que se $f_k = p_k \circ f : Z \to X_k$ for contínua, para cada $k \in \mathbb{N}^*$, então $f : Y \to \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ será contínua. A outra implicação é óbvia.

Se $y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, então $p_k(\underbrace{f(y_n)}_{z_n}) = p_k(z_n) = p_k(\underbrace{\{x_1^n, x_2^n, x_3^n, \cdots\}}_{z_n}) =$

$x_k^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x_k = p_k(\underbrace{f(y)}_{z})$.

Se $z = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\} = f(y)$, mostremos que $f(y_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z$.

De fato: dado $\epsilon > 0$, seja $K \in \mathbb{N}^*$ tal que $\displaystyle\sum_{i=K+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\epsilon}{2}$ e seja

$\hat{N} \in \mathbb{N}^*$ tal que $\dfrac{\rho_i(x_i^n, x_i)}{1+\rho_i(x_i^n, x_i)} < \dfrac{\epsilon}{2}$, $n \geqslant \hat{N}$, $1 \leqslant i \leqslant K$.

Desta forma

$$\pi(z_n, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i^n, x_i)}{1+\rho_i(x_i^n, x_i)} \leqslant \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i^n, x_i)}{1+\rho_i(x_i^n, x_i)} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \square$$

Proposição

Sejam $(X_i, \rho_i), i \in \mathbb{N}^*$, espaços métricos e $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ o seu produto. Então, $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ será compacto se, e somente se, (X_i, ρ_i) for compacto, para cada $i \in \mathbb{N}^*$.

Prova: Basta mostrar que, se (X_i, ρ_i) for compacto, $i \in \mathbb{N}^*$ então, $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \pi)$ será compacto. A outra implicação é imediata.

Seja $\{z_n\}$ uma seqüência em $Z = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Então, $z_n = \{x_n^1, x_n^2, x_n^3, \cdots\} =: \{x_n^k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, com $x_n^k \in X_k$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

- Seja $N_1 \subset \mathbb{N}$ um conjunto infinito tal que $x_n^1 \overset{N_1 \ni n \to \infty}{\longrightarrow} x_1 \in X_1$.
- Se $N_{j-1} \subset N_{j-2} \subset \cdots \subset N_1 \subset \mathbb{N}$ são infinitos e, para $1 \leqslant i \leqslant j-1$, $x_n^i \overset{N_i \ni n \to \infty}{\longrightarrow} x_i \in X_i$, seja $N_j \subset N_{j-1}$ infinito com $x_n^j \overset{N_j \ni n \to \infty}{\longrightarrow} x_j \in X_j$.
- Escolhento n_k como o $k-$ésimo elemento de N_k temos que $x_{n_k}^j \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} x_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.
- Agora da continuidade da identidade de Z nele mesmo e do teorema anterior, $z_{n_k} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} z := \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. □

Lema de Urysohn

A seguir usamos a seguinte versão elementar do Lema de Urysohn.

Lema (Lema de Urysohn)

Seja (X, d) um espaço métrico, $U \subset X$ um aberto e $K \subset U$ um compacto. Então existe uma função contínua $f \in C(X, [0,1])$ tal que $\chi_K \leqslant f \leqslant \chi_U$.

Prova: Basta tomar

$$f(x) = \frac{d(x, U^c)}{d(x, U^c) + d(x, K)}. \square$$