Espaços Métricos
Espaços Métricos Completos: Categoria de Baire - Aplicações
Aula 18

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

26 de Outubro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Aplicações do Teorema de Baire

Definição (Aplicação Aberta e Fechada)

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear.

(1) *Diremos que T será aberta se $T(U)$ for aberto em Y, sempre que U for aberto em X.*

(2) *Diremos que T será fechada se $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ for fechado em $X \times Y$.*

Teorema da Aplicação Aberta

Teorema (da Aplicação Aberta)

Seja X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado.

Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $T(X)$ for de segunda categoria em Y então,

(a) *T será sobrejetora,*

(b) *T será aberta e*

(c) *Y será de segunda Categoria.*

Corolário

Sejam X e Y espaços de Banach.

(1) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for sobrejetora então, T será aberta.*

(2) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for bijetora então, T será um isomorfismo.*

Princípio da Limitação Uniforme

Teorema (Princípio da Limitação Uniforme)

Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $A \subset \mathcal{L}(X,Y)$.

a) *Se $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\}$ for de segunda categoria então, $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$.*

b) *Se X for Banach e $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\} = X$ então, $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$.*

c) *Se X for Banach, $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, $\{T_n x\}$ for convergente, para cada $x \in X$, e $T : X \to Y$ for definida por $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ então, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$.*

Prova: Provaremos a), b) e c) seguem do Teorema de Baire. Seja

$$E_n = \{x \in X : \sup_{T \in A} \|Tx\| \leqslant n\} = \bigcap_{T \in A} \{x \in X : \|Tx\| \leqslant n\}.$$

Então, os E_n's são fechados e como sua união contém um conjunto de segunda categoria devemos ter que algum E_n contém uma bola, $[B_r(x_0)]^-$, $r > 0$.

Então $E_{2n} \supset [B_r(0)]^-$ pois, $\|x\| \leqslant r \Rightarrow -x + x_0 \in [B_r(x_0)]^- \subset E_n$ e

$$\|Tx\| = \|T(x - x_0)\| + \|Tx_0\| \leqslant n + n = 2n, \quad \forall \quad T \in A.$$

Logo $\|Tx\| \leqslant 2n$ sempre que $\|x\| \leqslant r$ e para todo $T \in A$. Segue que

$$\|T\| \leqslant \frac{2n}{r} \quad \forall \quad T \in A. \ \square$$

Teorema do Gráfico Fechado

Teorema (Gráfico Fechado)

Se X e Y forem espaços de Banach e $T : X \to Y$ for fechada então, T será limitada.

Prova: Sejam π_1 e π_2 as projeções de $G(T)$ em X e Y, isto é, $\pi_1(x, T_x) = x$ e $\pi_2(x, T_x) = Tx$.

Obviamente $\pi_1 \in \mathcal{L}(G(T), X)$ e $\pi_2 \in \mathcal{L}(G(T), Y)$.

Como X e Y são completos $X \times Y$ é completo e portanto $G(T)$ é completo (pois é fechado).

Como π_1 é uma bijeção de $G(T)$ em X, π_1^{-1} é limitado. Então $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ é limitado. $\square$

Os Teoremas das funções implícita e inversa

Definição (Derivada de Frechét)

Sejam $(Z, \|\cdot\|_Z)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ espaços de Banach, $G \subset Z$.

Uma função $F : G \to W$ será Frechét diferenciável em $z_0 \in G^o$ se, e somente se, existir $\partial F(z_0) \in \mathcal{L}(Z, W)$ tal que

$$\frac{\|F(z) - F(z_0) - \partial F(z_0)(z - z_0)\|_W}{\|z - z_0\|_Z} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

O operador $\partial F(z_0)$ será chamado Derivada de Frechét de F em z_0.

Definição (Funções Continuamente Diferenciáveis)

Se F for diferenciável em todos os pontos de $G \subset Z$, a função

$$G \ni z \mapsto \partial F(z) \in \mathcal{L}(Z, W), \text{ denotada por } \partial F,$$

será chamada de função derivada de Frechét.

Diremos que F será continuamente diferenciável em G se for diferenciável em todos os pontos de G e $\partial F : G \to \mathcal{L}(Z, W)$ for contínua.

Note que, se $F: G \subset Z \to W$ for continuamente diferenciável e $z_1, z_2 \in G$ forem tais que $\{z(t) = tz_1 + (1-t)z_2 : t \in (a,b)\} \subset G$ então, $(a,b) \ni t \mapsto F(z(t))$ será continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = \partial F(z(t))\,(z_1 - z_2), \quad t \in (a,b),$$

onde

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{h}.$$

Isto segue diretamente da definição de derivada de Frechét.

Derivadas Parciais

Sejam $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach.

Se $F:G\subset X\times Y\to Y$ for Frechét diferenciável em $(x_0,y_0)\in G^o$,

$$\partial F(x_0,y_0)\in\mathcal{L}(X\times Y,Y), \text{ e}$$

$$\partial F(x_0,y_0)(h,k)=\partial F(x_0,y_0)(h,0)+\partial F(x_0,y_0)(0,k).$$

Defina a derivada parcial com respeito a x, $\boxed{\partial_x F(x_0,y_0)\in\mathcal{L}(X,Y)}$

e a derivada parcial com respeito a y, $\boxed{\partial_y F(x_0,y_0)\in\mathcal{L}(Y) \text{ por}}$

$$\boxed{\partial_x F(x_0,y_0)h=\partial F(x_0,y_0)(h,0)} \text{ e } \boxed{\partial_y F(x_0,y_0)k=\partial F(x_0,y_0)(0,k).}$$

Sendo assim,

$$\frac{\|F(x,y)-F(x_0,y_0)-\partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0)\|_Y}{\max\{\|x-x_0\|_X,\|y-y_0\|_Y\}}$$

$$=\frac{\|F(x,y)-F(x_0,y_0)-\partial F(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)\|_Y}{\max\{\|x-x_0\|_X,\|y-y_0\|_Y\}}\overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow}0$$

Desta forma, se

$$N(x,y)=F(x,y)-F(x_0,y_0)-\partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0)$$

então,

$$\frac{\|N(x,y)\|_Y}{\max\{\|x-x_0\|_X,\|y-y_0\|_Y\}}\overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow}0$$

Exemplo

Seja $(Z, \|\cdot\|_Z)$ um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(Z)$ com $\|A\|_{\mathcal{L}(Z)} < 1$.

Então $I + A$ é um isomorfismo.

De fato:

Basta ver que $I + A$ é bijetora, isto é, para cada $w \in Z$, existe um único $z \in Z$ tal que $(I + A)z = w$, ou ainda, para cada $w \in Z$, $T_w z = w - Az$ tem um único ponto fixo. Isto é imediato do fato que T_w é uma contração com constante $\kappa = \|A\|_{\mathcal{L}(Z)} < 1$. $\square$

Exercício (*)

Seja $(Z, \|\cdot\|_Z)$ for Banach e $B_0 \in \mathcal{L}(Z)$ for um isomorfismo. Mostre que, se $\|B - B_0\|_{\mathcal{L}(Z)} < \|B_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)}^{-1}$, B será um isomorfismo.

Sugestão: $B = B_0(I + B_0^{-1}(B - B_0))$.

Teorema da função implícita

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach.
Se $F\colon G \subset X \times Y \to Y$ for uma função continuamente diferenciável em um aberto G de $X \times Y$ e $(x_0, y_0) \in G$.

Se $F(x_0,y_0)=0$ e $\partial_y F(x_0,y_0)\in\mathcal{L}(Y)$ for um isomorfismo, escrevendo

$$N(x,y)=F(x,y)-0-\partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0)$$

na forma

$$y=y_0+(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}[F(x,y)-\partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0)-N(x,y)]$$

temos a forma de verificar que, para cada x próximo a x_0, existe um único y próximo a y_0 que resolve $F(x,y)=0$.

Basta mostrar que, para cada x próximo a x_0,

$$T_x y=y_0-(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\left[\partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0)+N(x,y)\right]$$

tem um único ponto fixo.

Teorema (da função implícita)

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *espaços de Banach,* $G \subset X \times Y$ *um aberto e* $(x_0, y_0) \in G$. *Se*

(h_1) $F: G \to Y$ *for continuamente diferenciável,*

(h_2) $F(x_0, y_0) = 0$ *e* $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y)$ *for um isomorfismo*

então,

(t_1) *Dado* $\epsilon > 0$, *existirão* $0 < \delta \leqslant \epsilon$ *e* $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ *contínua tal que* $(x, y(x)) \in G$ *e* $F(x, y(x)) = 0$, *para todo* $x \in B_\delta^X(x_0)$.

(t_2) $y : B_\delta(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ *será continuamente diferenciável e*

$$\partial y(x) = -[\partial_y F(x, y(x))]^{-1} \partial_x F(x, y(x)), \ \forall x \in B_\delta^X(x_0).$$

Prova de (t_1):

Basta mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta \leqslant \epsilon$ tal que, a função

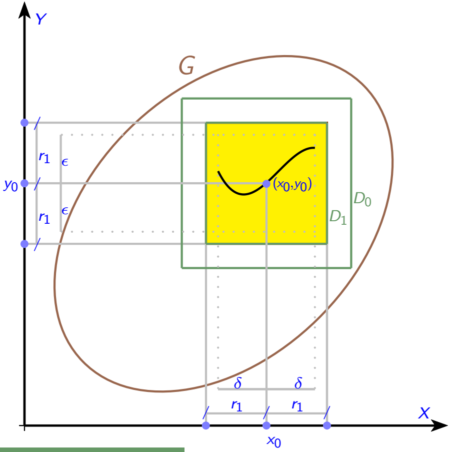
$$T_x y = y_0 - (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[\partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + N(x, y)]$$

tem um único ponto fixo $y(x) \in B_\epsilon^Y(y_0)$, para cada $x \in B_\delta^X(x_0)$.

Para $r > 0$, seja

$$D_r = \{(x, y) \in G : \|x - x_0\|_X \leqslant r \text{ e } \|y - y_0\|_Y \leqslant r\}.$$

Escolha $r_0 > 0$ tal que $D_0 = D_{r_0} \subset G$.



Seja $N : D_0 \to Y$ definido por

$$N(x,y) = F(x,y) - 0 - \partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0) - \partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Escolha $r_1 < r_0$ e tal que,

$$\|N(x,y)\|_Y \leqslant \frac{1}{2\|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)}} \max\{\|x-x_0\|_X, \|y-y_0\|_Y\}$$

e, sempre que $(x,y) \in D_1 := D_{r_1}$,

$$\|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)} \|\partial_y F(x,y) - \partial_y F(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leqslant \frac{1}{2}$$

Isto e o Exercício (*) implicam que $\partial_y F(x,y)$ é um isomorfismo

Se $\|y-y_0\|_Y \leqslant \epsilon \leqslant r_1$, escolha $\delta \leqslant \epsilon$ tal que

$$\delta \|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)} \|\partial_x F(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, para $\|x - x_0\|_X \leqslant \delta$

$\| T_x y - y_0\|_Y$

$$\leqslant \|(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)}[\|\partial_x F(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x - x_0\|_X + \|N(x,y)\|_Y]$$

$$\leqslant \|(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)}\|\partial_x F(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\delta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Logo, para (x, y) satisfazento $\|x - x_0\|_X \leqslant \delta$ e $\|y - y_0\|_Y \leqslant \epsilon$,

$$\| T_x y - y_0\|_Y \leqslant \epsilon,$$

ou seja, T_x leva $\bar{B}_\epsilon(y_0)$ em $\bar{B}_\epsilon(y_0)$

Mostremos que $T_x : \bar{B}_\epsilon(y_0) \to \bar{B}_\epsilon(y_0)$ é uma contração.

$$T_x y - T_x y' = -(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[N(x,y) - N(x,y')]$$

$$= -\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[F(x,y) - F(x,y') - \partial_y F(x_0,y_0)(y-y')]$$

$$= -(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\left[\int_0^1 \frac{d}{dt}[F(x, ty+(1-t)y')]dt - \partial_y F(x_0,y_0)(y-y')\right].$$

$$= -(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\int_0^1 [\partial_y F(x, ty+(1-t)y') - \partial_y F(x_0,y_0)](y-y')dt.$$

Somente nas igualdades acima a prova para espaços de Banach difere da prova para espaços euclideanos. Isto pode ser facilmente contornado pela aplicação do Teorema de Hahn-Banach.

Disto segue que,

$$\|T_x y - T_x y'\|_Y \leqslant \frac{1}{2}\|y - y'\|_Y .$$

Do Princípio da Contração de Banach, que T_x tem um único ponto fixo $y(x)$ fixo satisfazendo $\|y(x)-y_0\|_Y \leqslant \epsilon$, sempre que $\|x-x_0\|_X \leqslant \delta$.

Isto também mostra que $y:\bar{B}_\delta^X(x_0)\to\bar{B}_\epsilon^Y(y_0)$ é contínua em $x=x_0$.

Agora como $F(x,y(x)) = 0$, uma repetição do argumento nos dá também a continuidade de y em qualquer $x \in \bar{B}_\delta(x_0)$.

A prova de (t_2) segue da seguinte forma.

Primeiramente note que, $F(x+h, y(x+h)) - F(x, y(x)) = 0$ e

$$\tilde{N}(x+h, y(x+h)) = \underbrace{F(x+h, y(x+h)) - F(x, y(x))}_{=0}$$

$$- \partial_x F(x, y(x))h - \partial_y F(x, y(x))(y(x+h) - y(x)).$$

Logo, podemos escolher $\delta > 0$ tal que, para todo h tal que $\|h\|_X \leqslant \delta$,

$$\|y(x+h) - y(x)\|_Y \leqslant \| \underbrace{\partial_y F(x, y(x))^{-1}}_{\text{Exercício (*)}} \partial_x F(x, y(x))h\|_Y$$

$$+ \frac{1}{2} \max\{\|h\|_X, \|y(x+h) - y(x)\|_Y\}.$$

Segue que

$$\sup_{\|h\|_X \leqslant \delta} \frac{\|y(x+h) - y(x)\|_Y}{\|h\|_X} < \infty. \tag{1}$$

Como $F(x+h,y(x+h)) - F(x,y(x)) = 0$

$$\frac{\|-\partial_x F(x,y(x))h - \partial_y F(x,y(x))(y(x+h)-y(x))\|_Y}{\max\{\|h\|_X, \|y(x+h)-y(x)\|_Y\}} \xrightarrow{\|h\|_X \to 0} 0.$$

Segue de (1) que

$$\frac{\|-\partial_x F(x,y(x))h - \partial_y F(x,y(x))(y(x+h)-y(x))\|_Y}{\|h\|_X} \xrightarrow{\|h\|_X \to 0} 0$$

e, portanto,

$$\frac{\|-\partial_y F(x,y(x))^{-1}\partial_x F(x,y(x))h - (y(x+h)-y(x))\|_Y}{\|h\|_X} \xrightarrow{\|h\|_X \to 0} 0.$$

Isto mostra que $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ é diferenciável e que

$$-\partial y(x) = -\partial_y F(x, y(x))^{-1} \partial_x F(x, y(x))$$

como o lado direito da expressão acima é uma função contínua, segue que $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ é continuamente diferenciável. □

Teorema (da função inversa)

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ *um espaço de Banach,* $G = G^o \subset X$ *e* $x_0 \in G$. *Se*

(h_1) $F : G \to X$ *for continuamente diferenciável e*

(h_2) $\partial F(x_0) \in \mathcal{L}(X)$ *for um isomorfismo*

então,

(t_1) *existirão abertos* $x_0 \in U \subset G$ *e* $F(x_0) \in V \subset F(G)$ *e função contínua* $\tilde{F} : V \to U$ *tal que* $\tilde{F} \circ F(x) = x$, *para todo* $x \in U$ *e* $F \circ \tilde{F}(y) = y$ *para todo* $Y \in V$.

(t_2) $\tilde{F} : V \to U$ *será continuamente diferenciável e*

$$\partial\tilde{F}(y) = [\partial F(\tilde{F}(y))]^{-1}.$$

Prova:

Basta considerar a função $H(x,y)=x-F(y)$, observar que

(a) H é continuamente diferenciável em $X \times G \subset X \times X$

(b) $H(F(x_0),x_0) = 0$ e $\partial_y H(F(x_0),x_0) = \partial F(x_0) \in \mathcal{L}(X)$ é um isomorfismo.

e aplicar o Teorema da função implícita. $\square$

Exemplo

Seja $(Z, \|\cdot\|_Z)$ um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(Z)$ com $\|A\|_{\mathcal{L}(Z)} < 1$.

Então $I + A$ é um isomorfismo.

De fato: Basta ver que $I + A$ é bijetora, isto é, para cada $w \in Z$, existe um único $z \in Z$ tal que $(I + A)z = w$, ou ainda, para cada $w \in Z$, $T_w z = w - Az$ tem um único ponto fixo. Isto é imediato do fato que T_w é uma contração com constante $\kappa = \|A\|_{\mathcal{L}(Z)} < 1$. $\square$

Exercício (*)

Seja $(Z, \|\cdot\|_Z)$ for Banach e $B_0 \in \mathcal{L}(Z)$ for um isomorfismo. Mostre que, se $\|B - B_0\|_{\mathcal{L}(Z)} < \|B_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)}^{-1}$, B será um isomorfismo.

Sugestão: $B = B_0(I + B_0^{-1}(B - B_0))$.

Para quem viu o Teorema de Hahn-Banach

Para qualquer $w^* \in W^*$ segue, da continuidade e linearidade, que

$$\frac{d}{dt}(w^*(T(z(t))dt) = w^*(\frac{d}{dt}(T(z(t)))dt),$$

Sendo assim, para cada $w^* \in W^*$

$$w^*(T(z_1) - T(z_2)) = \int_0^1 w^*(\frac{d}{dt}(T(z(t))dt)dt$$

Recorde, do Teorema de Hahn-Banach, que existe $w^* \in W^*$,
$\|w^*\| = 1$, tal que $w^*(T(z_1) - T(z_2)) = \|T(z_1) - T(z_2)\|$.

Mostremos que $T_x : \bar{B}_\epsilon(y_0) \to \bar{B}_\epsilon(y_0)$ é uma contração. Escolhento $y^* \in Y^*$ com $\|y^*\|_{Y^*} = 1$ e $y^*(T_x y - T_x y') = \|T_x y - T_x y'\|_Y$.

$$y^*(T_x y - T_x y') = -y^*((\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[N(x,y) - N(x,y')])$$

$$= -y^*((\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[F(x,y) - F(x,y') - \partial_y F(x_0, y_0)(y - y')])$$

$$= -\int_0^1 y^*((\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[\partial_y F(x, ty + (1-t)y') - \partial_y F(x_0, y_0)](y - y'))dt.$$

Curiosidade: Se $[0,1] \ni t \mapsto f(t) \in Z$ for uma função contínua e $z^* \in Z^*$, então

$$Z^* \ni z^* \mapsto \int_0^1 \langle f(t), z^* \rangle dt \in \mathbb{K}$$

define um funcional linear contínuo $\zeta \in Z^{**}$ em K e

$$\|\zeta\|_{Z^{**}} \leqslant \int_0^1 \|f(t)\| dt.$$

Se Z for reflexivo, isto é, $Z^{**} = J(Z)$, com a isometria canônica J, e $Jz_f = \zeta$, definimos

$$z_f =: \int_0^1 f(t) dt.$$