Espaços Métricos
Espaços Métricos Compactos - Propriedades
Aula 18

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

11 de Novembro de 2020
Segundo Semestre de 2020

Lema do recobrimento de Lebesgue

Definição (Número de Lebesgue)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Dada uma cobertura aberta $\{G_i : i \in I\}$ de X, se $r > 0$ for tal que, cada subconjunto de X com diâmetro menor que r estiver contido em G_j, para algum $j \in I$, a será camado um número de Lebesgue para a cobertura $\{G_i : i \in I\}$.

Proposição (Lema do Recobrimento de Lebesgue)

Se (X, ρ) for um espaço métrico compacto, toda cobertura aberta de X terá um número de Lebesgue.

Prova Seja $\{G_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de X. Se todo subconjunto de X está contido em algum G_i, $i \in I$, acabamos.

Se não, considere a coleção $\mathcal{A} := \{A \subset X : A \subsetneq G_i, \forall i \in I\}$ e seja $a := \inf\{\mathrm{diam}(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Se $a > 0$ acabamos.

Mostremos, por redução ao absurdo, que $a > 0$. Se não for este o caso, existirá $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{diam}(A_n) < \frac{1}{n}$. Seja $x_n \in A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Como $\{x_n\}$ tem uma subseqüência convergente, já vamos assumir que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como $x \in G_{i_x}$ para algum $i_x \in I$ e G_{i_x} é aberto, existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset G_{r_x}$.

Tomando $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_x} < \frac{r_x}{2}$ e $\rho(x_{n_x}, x) < \frac{r_x}{2}$ temos que $A_{n_x} \subset G_{i_x}$ e isto contradiz o fato de $A_{n_x} \in \mathcal{A}$. $\square$

Estes resultado permite concluir que

Corolário

Se (X, ρ) for métrico compacto, toda cobertura aberta de X terá um refinamento formado por bolas abertas de mesmo raio.

O Teorema de Mazur

Nesta seção $(X, \|\cdot\|_X)$ será um espaço vetorial normado.

Recorde que $C \subset X$ é convexo, se somente se,

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\} \subset C \text{ sempre que } x, y \in C.$$

Exercício

Mostre que a interseção qualquer de convexos é convexa.

Definição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$.

Definimos a envoltória convexa de K por

$$\mathrm{co}K = \bigcap \{C \subset X : C \text{ é convexo e } C \supset K\}$$

Proposição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$ convexo.

Então,

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ e \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Prova: É claro que

$$K \subset \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ \ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

Seja

$$K_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Mostremos, por indução, que $K_n \subset K$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

É claro que $K_1 \subset K$.

Suponha que, para $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $K_j \subset K$ e mostremos que $K_n \subset K$.

Seja $k \in K_n$, isto é, $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i$, com $k_i \in K$, $\alpha_i \in [0,1]$, $1 \leqslant i \leqslant n$ e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Se $\alpha_j = 0$, para algum $1 \leqslant j \leqslant n$, acabamos.

Se $\alpha_i \neq 0$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, defina $0 < \beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i < 1$.

Assim, $\alpha_n = 1 - \beta$ e

$$\hat{k} := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\beta} k_i \in K \quad \text{e} \quad k_n \in K.$$

Da convexidade de K temos que

$$k = \beta \hat{k} + (1-\beta) x_n \in K. \square$$

Exercício

Mostre que o fecho de um conjunto convexo é convexo.

Proposição

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $K \subset X$. Então,

$$\mathrm{co}K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ \ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ \ e \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Prova: Para verificar que o conjunto

$$\hat{K} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i : n \in \mathbb{N}^*,\ k_i \in K, \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n,\ \text{e}\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

é convexo tomamos dois elementos $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i$ e $x' = \sum_{i=1}^{n'} \alpha_i' k_i'$ de $\hat{K}$ e notamos que, se $\beta \in [0,1]$, $\beta x + (1-\beta)x' \in \hat{K}$ (exercício). Logo $K \subset \mathrm{co} K \subset \hat{K}$.

Do teorema anterior, um convexo que contenha K deve também conter $\hat{K}$. Logo $\mathrm{co} K = \hat{K}$ e o resultado está demonstrado. □

Definição

Chamaremos $\overline{\mathrm{co}}K := (\mathrm{co}K)^-$ *de envoltória convexa fechada de* K.

Exercício

Mostre que $\overline{\mathrm{co}}K = \bigcap\{F \subset X : F$ *é convexo e* $F = F^- \supset K\}$.

Proposição (Teorema de Mazur)

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ *for um espaço vetorial normado e* $K \subset X$ *for totalmente limitado então,* $\mathrm{co}K$ *será totalmente limitada.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ dado. Fixe $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ e $k_i \in K$, $1 \leqslant i \leqslant n_\epsilon$, tais que $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k_i)$. Se $K_\epsilon = \mathrm{co}\{k_1, \cdots, k_{n_\epsilon}\}$. Da Proposição 3 (completando com zeros as somas com menos de n_ϵ somandos)

$$K_\epsilon = \left\{ \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i k_i : \alpha_i \in [0,1], 1 \leqslant i \leqslant n_\epsilon, \text{ e } \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i = 1, \right\}.$$

Note que $f : S_{n_\epsilon} \to X$, $f(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_\epsilon}) = \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i k_i$ é contínua e

$$S_{n_\epsilon} = \left\{ (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_\epsilon}) \in [0,1]^{n_\epsilon} : \sum_{i=1}^{n_\epsilon} \alpha_i = 1 \right\}$$

é compacto (exercício). Como $f(S_{n_\epsilon}) = K_\epsilon$, K_ϵ é compacto.

Note que $\{B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k_\epsilon) : k_\epsilon \in K_\epsilon\}$, como cobertura de K_ϵ, tem uma subcobertura finita $\{B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k^i_\epsilon) : 1 \leqslant i \leqslant m_\epsilon\}$.

Segue que $\{B^X_{\epsilon}(k^i_\epsilon) : 1 \leqslant i \leqslant m_\epsilon\}$ cobre $\mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K_\epsilon) = \mathrm{co} \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B^X_{\frac{\epsilon}{2}}(k_i)$ que contém $\mathrm{co}K$. □

Corolário

Se X for um espaço de Banach e $K \subset X$ for um conjunto compacto então, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ será compacto.