

ESPAÇOS MÉTRICOS

Categoria de Baire e Aplicações

Aula 17

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

24 de Outubro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Categoria de Baire

Definição

Um conjunto $A \subset X$ será de Primeira Categoria em X se for união enumerável de conjuntos nunca densos, caso contrário ele será de Segunda Categoria em X .

É uma consequência imediata desta definição que

Proposição

(X, ρ) será de segunda categoria nele mesmo se, e somente se, em qualquer representação de X como união enumerável de fechados, pelo menos um deles contém uma bola aberta.

Teorema (Baire)

Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.

Exemplo

Todo espaço de Banach é de segunda categoria nele mesmo.

Aplicações do Teorema de Baire

Definição (Aplicação Aberta e Fechada)

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \rightarrow Y$ uma transformação linear.

- (1) Diremos que T será aberta se $T(U)$ for aberto em Y , sempre que U for aberto em X .
- (2) Diremos que T será fechada se $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ for fechado em $X \times Y$.

Teorema da Aplicação Aberta

Teorema (da Aplicação Aberta)

Seja X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado.

Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $T(X)$ for de segunda categoria em Y então,

- (a) T será sobrejetora,
- (b) T será aberta e
- (c) Y será de segunda Categoria.

Corolário

Sejam X e Y espaços de Banach.

- (1) Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for sobrejetora então, T será aberta.
- (2) Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for bijetora então, T será um isomorfismo.

Lema

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \rightarrow Y$ uma transformação linear então, são equivalentes:

- T é uma aplicação aberta;
- Existe $r > 0$ tal que $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$.

Prova: É claro que $a \Rightarrow b$. Provaremos que $b \Rightarrow a$. Assumindo b), mostremos que, se $U \subset X$ for aberto, $Tx \in T(U)^\circ$, para todo $x \in U$.

De fato, dado $x \in U$, seja $s > 0$ tal que $B_s^X(x) \subset U$ e

$$T(U) \supset T(B_s^X(x)) = T(x + sB_1^X(0)) = Tx + sT(B_1^X(0))$$

$$\supset Tx + sB_r^Y(0) = Tx + B_{sr}^Y(0) = B_{sr}^Y(Tx)$$

mostrando Tx é interior a $T(U)$. \square

Lema

Se X for Banach, Y for um espaço vetorial normado e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for tal que, para algum $r > 0$,

$$B_r^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$$

então,

$$B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset T(B_1^X(0)).$$

Prova: Como T é linear, se $\|y\| < r2^{-n}$ então, $y \in [T(B_{2^{-n}}^X(0))]^-$.

Se $\|y\| < \frac{r}{2}$, seja $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X(0)$ tal que $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{4}$. Indutivamente,

seja $x_n \in B_{2^{-n}}^X(0)$ tal que $\|y - \sum_{j=1}^n Tx_j\| < r2^{-n-1}$. Como X é

completo a série será $\sum x_n$ convergente. Se x for a sua soma,

$\|x\| < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ e $y = Tx$. Logo $T(B_1^X(0)) \ni y$, se $\|y\| < \frac{r}{2}$. \square

Prova (Teorema da Aplicação Aberta):

Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^X(0)$, $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^X(0))$ é de segunda categoria em Y e $Y \ni y \rightarrow ny \in Y$ é um homeomorfismo que leva $T(B_1^X(0))$ em $T(B_n^X(0))$.

Do Teorema de Baire $T(B_1^X(0))$ não pode ser nunca denso. Isto é, existe $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tal que $B_{2r}^Y(y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Segue que $B_{2r}^Y(-y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$ e que $B_{2r}^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Dos Lemas anteriores $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$ e T é aberta. \square

Funções contínuas nunca diferenciáveis

Exemplo

Em $C([0, 1], \mathbb{R})$ existem funções que não são diferenciáveis em nenhum ponto de $[0, 1]$.

Considere o subespaço $C_p([0, 1], \mathbb{R}) = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = f(1)\}$ de $C([0, 1], \mathbb{R})$ com a norma $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. É fácil ver que

$C_p([0, 1], \mathbb{R})$ é completo.

Mostraremos que o conjunto D das funções de $C_p([0, 1], \mathbb{R})$ que são diferenciáveis em pelo menos um ponto de $[0, 1]$ é de primeira categoria em X .

$C_p([0, 1], \mathbb{R})$ é isométrico a $X = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ é } 1 \text{ periódica}\}$.

Considere o conjunto

$$K = \left\{ f \in X : \sup \left\{ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} : 0 \neq h \in [-1, 1] \right\} < \infty, \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \right\}.$$

É claro que $D \subset K|_{[0,1]}$. Seja

$$K_i = \left\{ f \in X : \sup \left\{ \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} : 0 \neq h \in [-1, 1] \right\} \leq i, \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, se $K_i^- = K_i$ e $K_i^o = \emptyset$, K será de primeira categoria.

Do Teorema de Baire $X \not\supseteq K$.

Se $f \in K_j^-$, existe uma seqüência $f_n \in X$ e $x_n \in [0, 1]$ tal que

$$\sup \left\{ \frac{|f_n(x_n + h) - f_n(x_n)|}{|h|} : h \in [-1, 1] \setminus \{0\} \right\} \leq i, \quad \|f - f_n\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Podemos assumir que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x} \in [0, 1]$. Logo, para $h \in [-1, 1] \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{|f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})|}{|h|} &\leq \frac{|f(\bar{x} + h) - f(x_n + h)|}{|h|} + \frac{|f(x_n + h) - f_n(x_n + h)|}{|h|} \\ &+ \frac{|f_n(x_n + h) - f_n(x_n)|}{|h|} + \frac{|f_n(x_n) - f(x_n)|}{|h|} + \frac{|f(x_n) - f(\bar{x})|}{|h|} \\ &\leq \frac{|f(\bar{x} + h) - f(x_n + h)|}{|h|} + \frac{2}{|h|} \|f - f_n\|_X + i + \frac{|f(x_n) - f(\bar{x})|}{|h|} \end{aligned}$$

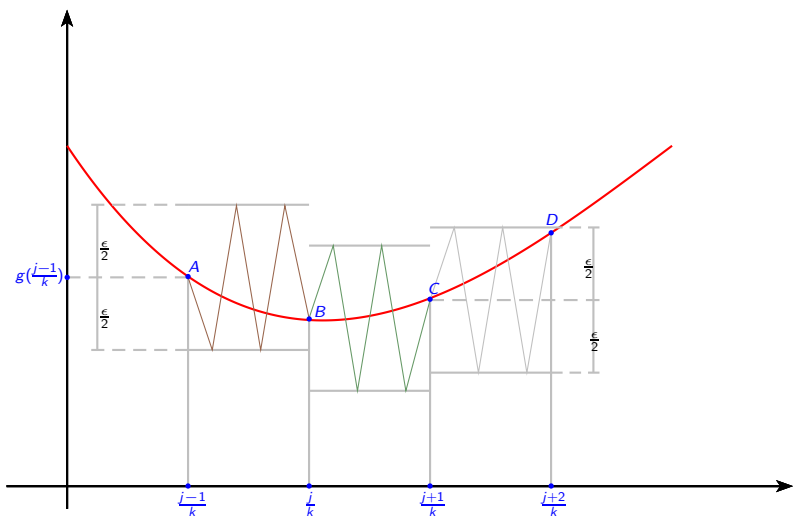
Fazendo $n \rightarrow \infty$, $\frac{|f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})|}{|h|} \leq i, \forall 0 \neq h \in [-1, 1]$ e $f \in K_i$.

Isto mostra que K_i é fechado.

Para mostrar que $K_i^o = \emptyset$, vamos mostrar que K_i^c é denso.

Seja $g \in X$, $\epsilon > 0$ e considere uma partição de $[0, 1]$ em $k = k(\epsilon)$ intervalos de comprimento $\frac{1}{k}$ de forma que

$$|g(x) - g(x')| < \frac{\epsilon}{2}, \quad x, x' \in \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right], \quad 1 \leq j \leq k.$$



A função g_ϵ definida pela poligonal dista menos que ϵ de g

Defina $g_\epsilon \in K_i^c$ da seguinte forma:

$$(1) \quad g_\epsilon\left(\frac{j-1}{k}\right) = g\left(\frac{j-1}{k}\right), \quad 1 \leq j \leq k+1.$$

(2) Em $[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}]$, o gráfico de g_ϵ será uma poligonal unindo $(\frac{j-1}{k}, g(\frac{j-1}{k}))$ a $(\frac{j}{k}, g(\frac{j}{k}))$, de forma que, os demais vértices estão em $[0, 1] \times \{g(\frac{j-1}{k}) - \epsilon, g(\frac{j-1}{k}) + \epsilon\}$.

(3) A inclinação de cada dos segmentos da poligonal excede i .

Segue que $g_\epsilon \in X$, $\|g_\epsilon - g\| < \epsilon$ e que $g \in K_i^c$. Isto mostra que K_i^c é denso ou, equivalentemente, $K_i^0 = \emptyset$.