Espaços Métricos
Espaços Métricos Compactos
Definição e Primeiros Resultados
Aula 17

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

09 de Novembro de 2020

Segundo Semestre de 2020

Cobertura, Subcobertura e Refinamento

Vamos começar este capítulo com algumas definições e resultados gerais que nos levarão à definição de um espaço métrico compacto.

Fixemos um espaço métrico (X, ρ) e $E \subset X$.

Definição (Recobrimento ou Cobertura)

Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ for uma família de subconjuntos de X tal que $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, diremos que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ será uma **cobertura** *de E.*

Definição (Refinamento e Subcobertura)

Seja $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *uma cobertura de* E*,*

- *Um* **refinamento** *de* $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *é uma cobertura* $\{W_\beta\}_{\beta\in B}$ *de* E *tal que, para cada* $\beta\in B$ *existe* $\alpha_\beta\in A$ *tal que* $W_\beta\subset V_{\alpha_\beta}$*.*
- *Uma* **sub-cobertura** *de* $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$*, é uma nova cobertura* $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A'}$ *de* E *com* $A'\subset A$*.*

Conjuntos Totalmente Limitados

Definição (Conjuntos Totalmente Limitados)

Se (X, ρ) for um espaço métrico, diremos que $E \subset X$ será totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, puder ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ.

Observação

É claro que todo conjunto totalmente E limitado é limitado.

E pode ser limitado e não ser totalmente limitado.

Se E for totalmente limitado então, E^- será totalmente limitado.

Caracterizações

Teorema

Se (X, ρ) for um espaço métrico e $E \subset X$, serão equivalentes:

a) *E é completo e totalmente limitado.*

b) **(A propriedade de Bolzano-Weierstrass)**
Toda seqüência em E tem subseqüência convergente em E.

c) **(A propriedade de Heine-Borel)**
Toda cobertura aberta de E tem subcobertura finita.

Prova: Mostraremos que: a) e b) são equivalentes, que a) e b) juntos implicam c) e que c) implica b).

a) implica b): Suponha a) e seja $\{x_n\}$ uma seqüência em E.

E pode ser coberto por um número finito de bolas de raios $\frac{1}{2}$ e pelo menos uma dessas bolas (B_1) deve conter infinitos x_n . Digamos que $x_n \in B_1$, para $n \in N_1$, $N_1 \subset \mathbb{N}$ infinito.

$E \cap B_1$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\frac{1}{2^2}$ e portanto uma dessas bolas (B_2) contém infinitos x_n, $n \in N_1$. Digamos que $x_n \in B_2$, para $n \in N_2 \subset N_1$ infinito.

Indutivamente, obtemos uma seqüência de bolas B_j de raio $\frac{1}{2^j}$ e uma seqüência decrescente de subconjuntos infinitos N_j de $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_j$ para $n \in N_j$. Escolha $n_k \in N_k$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Então $\{x_{n_j}\}$ é de Cauchy pois, $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < \frac{2}{2^j}$ sempre que $k > j$ e, como E é completo, o limite dessa subseqüência pertence a E.

b) implica a): Mostraremos que se qualquer das condições em a) falhar então b) falhará.

Se E não é completo, seja $\{x_n\}$ uma de Cauchy em E que não é convergente em E. Nenhuma subseqüência de $\{x_n\}$ pode convergir em E, caso contrário, a seqüência seria convergente em E.

Se E não é totalmente limitado, seja $\epsilon > 0$ tal que E não pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. Escolha $x_n \in E$ indutivamente da seguinte maneira.

Comece com qualquer $x_1 \in E$ e tendo escolhido $x_1, \dots, x_n$ escolha $x_{n+1} \in E \backslash \cup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$. Então $\rho(x_n, x_m) \geqslant \epsilon$ para todo m, n e portanto $\{x_n\}$ não tem subseqüência convergente.

a) e b) implicam c):

Basta mostrar que, se b) (a)) vale e $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de E por conjuntos abertos, existe $\epsilon > 0$ tal que toda bola de raio ϵ que intersepta E está contida em algum V_α, pois E pode ser coberto por um número finito de tais bolas de a).

Suponha que não; isto é, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma bola B_n de raio $1/2^n$ tal que $B_n \cap E \neq \varnothing$ e B_n não está contida em nenhum V_α. Escolha $x_n \in B_n \cap E$.

Passando para uma subseqüência podemos assumir que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in E$. Temos que $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in A$ e como V_α é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$.

Mas para $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n, x) < \frac{\epsilon}{3}$ e $2^{-n} < \frac{\epsilon}{3}$, $B_n \subset B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$, contradizendo a escolha de B_n.

c) implica b) Se $\{x_n\}$ for uma seqüência sem subseqüência convergente, para cada $x \in E$ existirá uma bola B_x, centrada em x, que contém x_n para, no máximo, um número finito de índices n (caso contrário haveria uma subseqüência que converge para x).

Então $\{B_x\}_{x \in E}$ é uma cobertura de E por abertos que não possui subcobertura finita. $\square$

Definição de Compacidade

Definição (Compacidade)

Em um espaço métrico (X, ρ), um conjunto $E \subset X$ é dito compacto se tem as propriedades a)-c) do teorema anterior e é dito relativamente compacto se E^- é compacto.

Todo conjunto relativamente compacto é limitado, a recíproca é falsa, em geral, mas é verdadeira em $\mathbb{R}^n$ como veremos a seguir.

Todo conjunto compacto é fechado e limitado, a recíproca é falsa, em geral, mas vale em $\mathbb{R}^n$ como mostra a proposição abaixo.

Primeiros Resultados

Proposição (Caracterização dos Compactos de $\mathbb{R}^n$)

Todo subconjunto fechado e limitado de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ é compacto.

Prova: Como subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ são completos, é suficiente mostrar que subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ são totalmente limitados.

Como cada subconjunto limitado está contido num cubo da forma

$$Q = [-R, R]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leqslant R\},$$

é suficiente mostrar que Q é totalmente limitado.

Dado $\epsilon > 0$, escolha um inteiro $k > R\sqrt{n}/\epsilon$ e expresse Q como a união de k^n cubos congruentes dividindo o intevalo $[-R, R]$ em k intervalos iguais.

O lado desses subcubos e $2R/k$ e portanto o seu diâmetro é $\sqrt{n}(2R/k) < 2\epsilon$ e portanto cada um desses subcubos está contido na bola de raio ϵ com centro coincidente com o centro do cubo. $\square$

Da definição de compacto

Proposição (Compactos são completos)

Se (X, ρ) for métrico compacto então, (X, ρ) será completo.

Consequentemnte,

Todo fechado de um métrico compacto será compacto e

todo compacto de um espaço métrico qualquer será fechado.

Funções definidas espaços métricos compactos e tomando valores em $\mathbb{R}$ assumem seus valores extremos.

Proposição (Teorema de Weierstrass)

Seja (X,ρ) um espaço métrico compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ para todo $x \in X$.

Prova: Seja $m_1 = \inf_{x\in X} f(x)$ e $m_2 = \sup_{x\in X} f(x)$ $(m_1, m_2 \in [-\infty, \infty])$.

Sejam $\{x_n^1\}$ e $\{x_n^2\}$ tais que $f(x_n^1) \xrightarrow{n\to\infty} m_1$ and $f(x_n^2) \xrightarrow{n\to\infty} m_2$.

Como (X, ρ) é compacto, existem $x_1, x_2 \in X$ e $N \subset \mathbb{N}$ infinito tais que $x_n^i \xrightarrow{N\ni n\to\infty} x_i$, $i=1,2$ e assim, $f(x_1) = m_1 \leqslant f(x) \leqslant m_2 = f(x_2)$ para todo $x \in X$. $\square$