Espaços Métricos
Categoria de Baire e Aplicações
Aula 16

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

19 de Outubro de 2022

Segundo Semestre de 2022

Categoria de Baire

Se (X, ρ) for um espaço métrico, recorde que um conjunto $A \subset X$ será *nunca denso* se o seu fecho tem interior vazio.

A união de um número finito de conjuntos nunca densos é um conjunto nunca denso.

Contudo, a união enumerável de conjuntos nunca denso não precisa ser nunca denso.

Definição

Um conjunto $A \subset X$ será de Primeira Categoria em X se for união enumerável de conjuntos nunca densos, caso contrário ele será de Segunda Categoria em X.

É uma conseqüência imediata desta definição que

Proposição

(X, ρ) será de segunda categoria nele mesmo se, e somente se, em qualquer representação de X como união enumerável de fechados, pelo menos um deles contém uma bola aberta.

Teorema (Baire)

Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.

Prova: Suponha que não, isto é, que

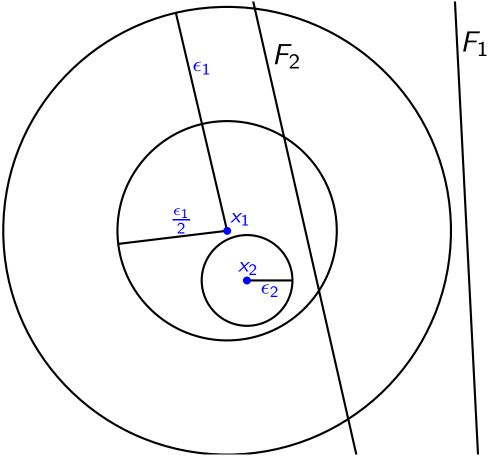
$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

com cada F_i fechado e de interior vazio.

Então $X \backslash F_1$ é não vazio e aberto. Seja x_1 e $0 < \epsilon_1 < 1$ tal que $x_1 \in X \backslash F_1$ e $B_{\epsilon_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset$.

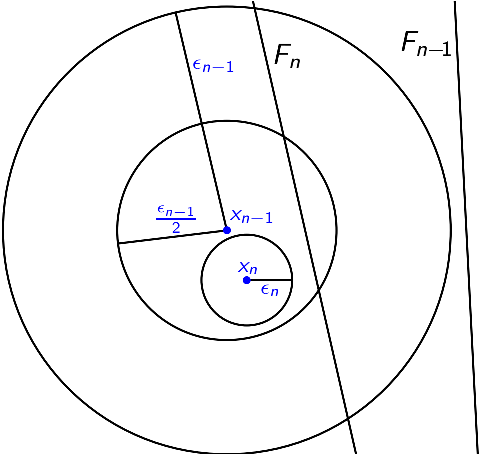
Como $B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1) \not\subset F_2$, existe $x_2 \in B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1)$ e $\epsilon_2 < \frac{1}{2}$ tal que

$$B_{\epsilon_2}(x_2) \cap F_2 = \emptyset \text{ e } B_{\epsilon_2}(x_2) \subset B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1).$$



Indutivamente existe x_n, $\epsilon_n < \frac{1}{2^{n-1}}$ tais que $x_n \in B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1})$

$B_{\epsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$ e $B_{\epsilon_n}(x_n) \subset B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1})$.



A seqüência $\{x_n\}$ é de Cauchy pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$ e $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como X é completo $\{x_n\}$ é convergente. Seja x o seu limite. Para cada n fixo $x \in B_{\epsilon_n}(x_n)$ pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$. Logo $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ o que é uma contradição. $\square$

Exemplo

Todo espaço de Banach é de segunda cateoria nele mesmo.

Aplicações do Teorema de Baire

Definição (Aplicação Aberta e Fechada)

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear.

(1) *Diremos que T será aberta se $T(U)$ for aberto em Y, sempre que U for aberto em X.*

(2) *Diremos que T será fechada se $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ for fechado em $X \times Y$.*

Teorema da Aplicação Aberta

Teorema (da Aplicação Aberta)

Seja X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado.

Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $T(X)$ for de segunda categoria em Y então,

(a) *T será sobrejetora,*

(b) *T será aberta e*

(c) *Y será de segunda Categoria.*

Corolário

Sejam X e Y espaços de Banach.

(1) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for sobrejetora então, T será aberta.*

(2) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for bijetora então, T será um isomorfismo.*

Lema

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear então, são equivalentes:

a) *T é uma aplicação aberta;*

b) *Existe $r > 0$ tal que $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$.*

Prova: É claro que $a \Rightarrow b$. Provaremos que $b \Rightarrow a$. Assumindo b), mostremos que, se $U \subset X$ for aberto, $Tx \in T(U)^o$, para todo $x \in U$.

De fato, dado $x \in U$, seja $s > 0$ tal que $B_s^X(x) \subset U$ e

$$T(U) \supset T(B_s^X(x)) = T(x + sB_1^X(0)) = Tx + sT(B_1^X(0))$$
$$\supset Tx + sB_r^Y(0) = Tx + B_{sr}^Y(0) = B_{sr}^Y(Tx)$$

mostrando Tx é interior a $T(U)$. $\square$

Lema

Se X for Banach, Y for um espaço vetorial normado e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for tal que, para algum $r > 0$,

$$B_r^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$$

então,

$$B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset T(B_1^X(0)).$$

Prova: Como T é linear, se $\|y\| < r2^{-n}$ então, $y \in [T(B_{2^{-n}}^X(0))]^-$. Se $\|y\| < \frac{r}{2}$, seja $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X(0)$ tal que $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{4}$. Indutivamente, seja $x_n \in B_{2^{-n}}^X(0)$ tal que $\|y - \sum_{j=1}^n Tx_j\| < r2^{-n-1}$. Como X é completo a série será $\sum x_n$ convergente. Se x for a sua soma, $\|x\| < \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = 1$ e $y = Tx$. Logo $T(B_1^X(0)) \ni y$, se $\|y\| < \frac{r}{2}$. $\square$

Prova (Teorema da Aplicação Aberta):

Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^X(0)$, $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^X(0))$ é de segunda categoria em Y e $Y \ni y \to ny \in Y$ é um homeomorfismo que leva $T(B_1^X(0))$ em $T(B_n^X(0))$.

Do Teorema de Baire $T(B_1^X(0))$ não pode ser nunca denso. Isto é, existe $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tal que $B_{2r}^Y(y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Segue que $B_{2r}^Y(-y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$ e que $B_{2r}^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Dos Lemas anteriores $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$ e T é aberta. $\square$