Espaços Métricos
Espaços Métricos Completos: Categoria de Baire - Aplicações
Aula 16

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

26 de Outubro de 2020

Segundo Semestre de 2020

Os Teoremas das funções implícita e inversa

Definição (Derivada de Frechét)

Sejam $(Z, \|\cdot\|_Z)$ *e* $(W, \|\cdot\|_W)$ *espaços de Banach,* $G \subset Z$.

Uma função $F : G \to W$ *será Frechét diferenciável em* $z_0 \in G^o$ *se, e somente se, existir* $\partial F(z_0) \in \mathcal{L}(Z, W)$ *tal que*

$$\frac{\|F(z) - F(z_0) - \partial F(z_0)(z - z_0)\|_W}{\|z - z_0\|_Z} \xrightarrow{z \to z_0} 0.$$

O operador $\partial F(z_0)$ *será chamado Derivada de Frechét de* F *em* z_0.

Definição (Funções Continuamente Diferenciáveis)

Se F for diferenciável em todos os pontos de $G \subset Z$, a função

$$G \ni z \mapsto \partial F(z) \in \mathcal{L}(Z, W), \text{ denotada por } \partial F,$$

será chamada de função derivada de Frechét.

Diremos que F será continuamente diferenciável em G se for diferenciável em todos os pontos de G e $\partial F : G \to \mathcal{L}(Z, W)$ for contínua.

Note que, se $F : G \subset Z \to W$ for continuamente diferenciável e $z_1, z_2 \in G$ forem tais que $\{z(t) = tz_1 + (1-t)z_2 : t \in (a,b)\} \subset G$ então, $(a,b) \ni t \mapsto F(z(t))$ será continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = \partial F(z(t))\,(z_1 - z_2), \quad t \in (a,b),$$

onde

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = \lim_{h \to 0} \frac{F(z(t+h)) - F(z(t))}{h}.$$

Isto segue diretamente da definição de derivada de Frechét.

Derivadas Parciais

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach.

Se $F: G \subset X \times Y \to Y$ for Frechét diferenciável em $(x_0, y_0) \in G^o$,

$\partial F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X \times Y, Y)$, e

$\partial F(x_0, y_0)(h, k) = \partial F(x_0, y_0)(h, 0) + \partial F(x_0, y_0)(0, k)$.

Defina a derivada parcial com respeito a x, $\boxed{\partial_x F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Y)}$

e a derivada parcial com respeito a y, $\boxed{\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y) \text{ por}}$

$\boxed{\partial_x F(x_0, y_0) h = \partial F(x_0, y_0)(h, 0)}$ e $\boxed{\partial_y F(x_0, y_0) k = \partial F(x_0, y_0)(0, k).}$

Sendo assim,

$$\frac{\|F(x,y)-F(x_0,y_0)-\partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0)\|_Y}{\max\{\|x-x_0\|_X,\|y-y_0\|_Y\}}$$

$$=\frac{\|F(x,y)-F(x_0,y_0)-\partial F(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)\|_Y}{\max\{\|x-x_0\|_X,\|y-y_0\|_Y\}} \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

Desta forma, se

$$N(x,y)=F(x,y)-F(x_0,y_0)-\partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0)$$

então,

$$\frac{\|N(x,y)\|_Y}{\max\{\|x-x_0\|_X,\|y-y_0\|_Y\}} \overset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0$$

Teorema da função implícita

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach.
Se $F \colon G \subset X \times Y \to Y$ for uma função continuamente diferenciável
em um aberto G de $X \times Y$ e $(x_0, y_0) \in G$.

Se $F(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y)$ for um isomorfismo, escrevendo

$$N(x,y) = F(x,y) - 0 - \partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y F(x_0, y_0)(y - y_0)$$

na forma

$$y = y_0 + (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[F(x,y) - \partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) - N(x,y)]$$

temos a forma de verificar que, para cada x próximo a x_0, existe um único y próximo a y_0 que resolve $F(x,y) = 0$.

Basta mostrar que, para cada x próximo a x_0,

$$T_x y = y_0 - (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\left[\partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + N(x,y)\right]$$

tem um único ponto fixo.

Teorema (da função implícita)

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach, $G \subset X \times Y$ um aberto e $(x_0, y_0) \in G$. Se

(h_1) *$F : G \to Y$ for continuamente diferenciável,*

(h_2) *$F(x_0, y_0) = 0$ e $\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y)$ for um isomorfismo*

então,

(t_1) *Dado $\epsilon > 0$, existirão $0 < \delta \leqslant \epsilon$ e $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ contínua tal que $(x, y(x)) \in G$ e $F(x, y(x)) = 0$, para todo $x \in B_\delta^X(x_0)$.*

(t_2) *$y : B_\delta(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ será continuamente diferenciável e*

$$\partial y(x) = -[\partial_y F(x, y(x))]^{-1} \partial_x F(x, y(x)), \ \forall x \in B_\delta^X(x_0).$$

Prova de (t_1):

Basta mostrar que, dado $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta \leqslant \epsilon$ tal que, a função

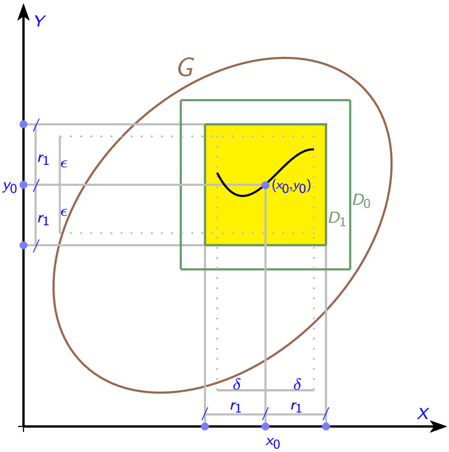
$$T_x y = y_0 - (\partial_y F(x_0, y_0))^{-1} [\partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + N(x, y)]$$

tem um único ponto fixo $y(x) \in B_\epsilon^Y(y_0)$, para cada $x \in B_\delta^X(x_0)$.

Para $r > 0$, seja

$$D_r = \{(x, y) \in G : \|x - x_0\|_X \leqslant r \text{ e } \|y - y_0\|_Y \leqslant r\}.$$

Escolha $r_0 > 0$ tal que $D_0 = D_{r_0} \subset G$.



Seja $N : D_0 \to Y$ definido por

$$N(x,y) = F(x,y) - 0 - \partial_x F(x_0,y_0)(x-x_0) - \partial_y F(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Escolha $r_1 < r_0$ e tal que,

$$\|N(x,y)\|_Y \leqslant \frac{1}{2\|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)}} \max\{\|x-x_0\|_X, \|y-y_0\|_Y\}$$

e, sempre que $(x,y) \in D_1 := D_{r_1}$,

$$\|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)} \|\partial_y F(x,y) - \partial_y F(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(Y)} \leqslant \frac{1}{2}$$

Isto e o Exercício (*) implicam que $\partial_y F(x,y)$ é um isomorfismo

Se $\|y-y_0\|_Y \leqslant \epsilon \leqslant r_1$, escolha $\delta \leqslant \epsilon$ tal que

$$\delta \|(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)} \|\partial_x F(x_0,y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, para $\|x - x_0\|_X \leqslant \delta$

$$\|T_x y - y_0\|_Y$$

$$\leqslant \|(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)}[\|\partial_x F(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x - x_0\|_X + \|N(x, y)\|_Y]$$

$$\leqslant \|(\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)}\|\partial_x F(x_0, y_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\delta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Logo, para (x, y) satisfazento $\|x - x_0\|_X \leqslant \delta$ e $\|y - y_0\|_Y \leqslant \epsilon$,

$$\|T_x y - y_0\|_Y \leqslant \epsilon,$$

ou seja, T_x leva $\bar{B}_\epsilon(y_0)$ em $\bar{B}_\epsilon(y_0)$

Mostremos que $T_x : \bar{B}_\epsilon(y_0) \to \bar{B}_\epsilon(y_0)$ é uma contração.

$$T_x y - T_x y' = -(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}[N(x,y) - N(x,y')]$$

$$= -\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}[F(x,y) - F(x,y') - \partial_y F(x_0,y_0)(y-y')]$$

$$= -(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\left[\int_0^1 \frac{d}{dt}[F(x,ty+(1-t)y')]dt - \partial_y F(x_0,y_0)(y-y')\right].$$

$$= -(\partial_y F(x_0,y_0))^{-1}\int_0^1 [\partial_y F(x,ty+(1-t)y') - \partial_y F(x_0,y_0)](y-y')dt.$$

Somente nas igualdades acima a prova para espaços de Banach difere da prova para espaços euclideanos. Isto pode ser facilmente contornado pela aplicação do Teorema de Hahn-Banach.

Disto segue que,

$$\|T_x y - T_x y'\|_Y \leqslant \frac{1}{2}\|y - y'\|_Y.$$

Do Princípio da Contração de Banach, que T_x tem um único ponto fixo $y(x)$ fixo satisfazendo $\|y(x)-y_0\|_Y \leqslant \epsilon$, sempre que $\|x-x_0\|_X \leqslant \delta$.

Isto também mostra que $y : \bar{B}_\delta^X(x_0) \to \bar{B}_\epsilon^Y(y_0)$ é contínua em $x = x_0$.

Agora como $F(x, y(x)) = 0$, uma repetição do argumento nos dá também a continuidade de y em qualquer $x \in \bar{B}_\delta(x_0)$.

A prova de (t_2) segue da seguinte forma.

Primeiramente note que, $F(x+h, y(x+h)) - F(x, y(x)) = 0$ e

$$\tilde{N}(x+h, y(x+h)) = \underbrace{F(x+h, y(x+h)) - F(x, y(x))}_{=0}$$

$$- \partial_x F(x, y(x))h - \partial_y F(x, y(x))(y(x+h) - y(x)).$$

Logo, podemos escolher $\delta > 0$ tal que, para todo h tal que $\|h\|_X \leqslant \delta$,

$$\|y(x+h) - y(x)\|_Y \leqslant \| \underbrace{\partial_y F(x, y(x))^{-1}}_{\text{Exercício (*)}} \partial_x F(x, y(x))h\|_Y$$

$$+ \frac{1}{2} \max\{\|h\|_X, \|y(x+h) - y(x)\|_Y\}.$$

Segue que

$$\sup_{\|h\|_X \leqslant \delta} \frac{\|y(x+h) - y(x)\|_Y}{\|h\|_X} < \infty. \qquad (1)$$

Como $F(x+h,y(x+h))-F(x,y(x))=0$

$$\frac{\|-\partial_x F(x,y(x))h-\partial_y F(x,y(x))(y(x+h)-y(x))\|_Y}{\max\{\|h\|_X,\|y(x+h)-y(x)\|_Y\}}\xrightarrow{\|h\|_X\to 0}0.$$

Segue de (1) que

$$\frac{\|-\partial_x F(x,y(x))h-\partial_y F(x,y(x))(y(x+h)-y(x))\|_Y}{\|h\|_X}\xrightarrow{\|h\|_X\to 0}0$$

e, portanto,

$$\frac{\|-\partial_y F(x,y(x))^{-1}\partial_x F(x,y(x))h-(y(x+h)-y(x))\|_Y}{\|h\|_X}\xrightarrow{\|h\|_X\to 0}0.$$

Isto mostra que $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ é diferenciável e que

$$-\partial y(x) = -\partial_y F(x, y(x))^{-1} \partial_x F(x, y(x))$$

como o lado direito da expressão acima é uma função contínua, segue que $y : B_\delta^X(x_0) \to B_\epsilon^Y(y_0)$ é continuamente diferenciável. □

Teorema (da função inversa)

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ *um espaço de Banach,* $G = G^o \subset X$ *e* $x_0 \in G$. *Se*

(h_1) $F : G \to X$ *for continuamente diferenciável e*

(h_2) $\partial F(x_0) \in \mathcal{L}(X)$ *for um isomorfismo*

então,

(t_1) *existirão abertos* $x_0 \in U \subset G$ *e* $F(x_0) \in V \subset F(G)$ *e função contínua* $\tilde{F} : V \to U$ *tal que* $\tilde{F} \circ F(x) = x$, *para todo* $x \in U$ *e* $F \circ \tilde{F}(y) = y$ *para todo* $Y \in V$.

(t_2) $\tilde{F} : V \to U$ *será continuamente diferenciável e*

$$\partial \tilde{F}(y) = [\partial F(\tilde{F}(y))]^{-1}.$$

Prova:

Basta considerar a função $H(x,y) = x - F(y)$, observar que

(a) H é continuamente diferenciável em $X \times G \subset X \times X$

(b) $H(F(x_0), x_0) = 0$ e $\partial_y H(F(x_0), x_0) = \partial F(x_0) \in \mathcal{L}(X)$ é um isomorfismo.

e aplicar o Teorema da função implícita. $\square$

Exemplo

Seja $(Z, \|\cdot\|_Z)$ *um espaço de Banach e* $A \in \mathcal{L}(Z)$ *com* $\|A\|_{\mathcal{L}(Z)} < 1$.

Então $I + A$ *é um isomorfismo.*

De fato: Basta ver que $I + A$ é bijetora, isto é, para cada $w \in Z$, existe um único $z \in Z$ tal que $(I + A)z = w$, ou ainda, para cada $w \in Z$, $T_w z = w - Az$ tem um único ponto fixo. Isto é imediato do fato que T_w é uma contração com constante $\kappa = \|A\|_{\mathcal{L}(Z)} < 1$. $\square$

Exercício (*)

Seja $(Z, \|\cdot\|_Z)$ *for Banach e* $B_0 \in \mathcal{L}(Z)$ *for um isomorfismo. Mostre que, se* $\|B - B_0\|_{\mathcal{L}(Z)} < \|B_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)}^{-1}$, *B será um isomorfismo.*

Sugestão: $B = B_0(I + B_0^{-1}(B - B_0))$.

Para quem viu o Teorema de Hahn-Banach

Para qualquer $w^* \in W^*$ segue, da continuidade e linearidade, que

$$\frac{d}{dt}(w^*(T(z(t))dt) = w^*(\frac{d}{dt}(T(z(t)))dt),$$

Sendo assim, para cada $w^* \in W^*$

$$w^*(T(z_1) - T(z_2)) = \int_0^1 w^*(\frac{d}{dt}(T(z(t))dt)dt$$

Recorde, do Teorema de Hahn-Banach, que existe $w^* \in W^*$,

$\|w^*\| = 1$, tal que $w^*(T(z_1) - T(z_2)) = \|T(z_1) - T(z_2)\|$.

Mostremos que $T_x : \bar{B}_\epsilon(y_0) \to \bar{B}_\epsilon(y_0)$ é uma contração. Escolhento $y^* \in Y^*$ com $\|y^*\|_{Y^*} = 1$ e $y^*(T_x y - T_x y') = \|T_x y - T_x y'\|_Y$.

$$y^*(T_x y - T_x y') = -y^*((\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[N(x,y) - N(x,y')])$$

$$= -y^*((\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[F(x,y) - F(x,y') - \partial_y F(x_0, y_0)(y - y')])$$

$$= -\int_0^1 y^*((\partial_y F(x_0, y_0))^{-1}[\partial_y F(x, ty + (1-t)y') - \partial_y F(x_0, y_0)](y - y'))dt.$$

Curiosidade: Se $[0,1] \ni t \mapsto f(t) \in Z$ for uma função contínua e $z^* \in Z^*$, então

$$Z^* \ni z^* \mapsto \int_0^1 \langle f(t), z^* \rangle dt \in \mathbb{K}$$

define um funcional linear contínuo $\zeta \in Z^{**}$ em K e

$$\|\zeta\|_{Z^{**}} \leqslant \int_0^1 \|f(t)\| dt.$$

Se Z for reflexivo, isto é, $Z^{**} = J(Z)$, com a isometria canônica J, e $Jz_f = \zeta$, definimos

$$z_f =: \int_0^1 f(t) dt.$$