Espaços Métricos
Aula de Revisão

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Segundo Semestre de 2022

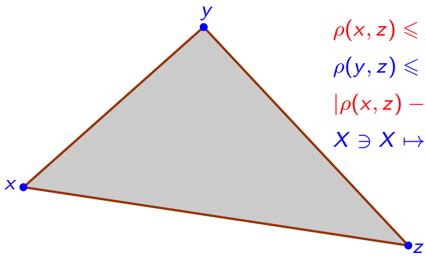
Definições e Exemplos

Definição

Seja X um conjunto não vazio. Uma **métrica ou distância** *em X é uma função $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ que satisfaz*

- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, *para todo* $x, y \in X$,
- $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$, *para todo* $x, y, z \in X$.

(X, ρ) é chamado espaço métrico.



$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$

$\rho(y,z) \leqslant \rho(y,x) + \rho(x,z)$

$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y)$

$X \ni X \mapsto \rho(x,z) \in [0,\infty)$ é Lipschitz

Definição (Norma)

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Uma **norma** *em V é uma função $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ que satizfaz*

$\|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0,$

$\|\lambda v\|_V = |\lambda| \|v\|_V$ *e*

$\|v + w\|_V \leqslant \|v\|_V + \|w\|_V$, *para todo $v, w \in V$.*

Definição (Espaço Vetorial Normado)

Um espaço vetorial V munido de uma norma $\|\cdot\|_V$ será chamado **espaço vetorial normado** *e denotado por $(V, \|\cdot\|_V)$. Note que*

$$V \times V \ni (v, w) \mapsto \rho(v, w) = \|v - w\|_V \text{ será uma métrica.}$$

Exemplo (Espaço Produto)

Sejam, $\mathbb{N} \ni N \geq 2$ *e* (X_i, ρ_i) *espaços métricos,* $1 \leqslant i \leqslant N$*. Fixado* $p \in [1, \infty]$*, no produto cartesiano* $Z = \prod_{i=1}^{N} X_i$ *podemos definir uma métrica fazendo*

$$\rho_p(z, z') = \left[\sum_{i=1}^{N} (\rho_i(x_i, x_i'))^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty \quad e \tag{1}$$

$$\rho_\infty(z, z') = \max\{\rho_i(x_i, x_i') : 1 \leqslant i \leqslant N\},$$

onde $z = (x_1, \cdots, x_N)$ *e* $z' = (x_1', \cdots, x_N')$ *são dois elementos quaisquer de* Z*. O espaço métrico* (Z, ρ_p) *é chamado* **espaço produto** *de* (X_i, ρ_i)*,* $1 \leqslant i \leqslant N$*. É fácil ver que*

$$\rho_\infty(z, z') \leqslant \rho_p(z, z') \leqslant \rho_1(z, z') \leqslant N\rho_\infty(z, z').$$

Exemplo (Subespaço métrico)

Seja (X, ρ) um epaço métrico e $M \subset X$. *De maneira natural, ρ restrita a $M \times M$ define uma métrica* $\rho_M = \rho_{|_{M \times M}}$ *em M.*

Quando fazemos isto M é chamado subespaço métrico de X e ρ_M é chamada métrica induzida em M pela métrica de X.

Abertos e fechados

Definição (Bola aberta e Bola fechada)

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Dados $x \in X$ e $r > 0$, o conjunto

$$B_r(x) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

é chamado **bola aberta** *de centro em x e raio r e o conjunto*

$$\bar{B}_r(x) := \{y \in X : \rho(x, y) \leqslant r\}$$

é chamado **bola fechada** *de centro em x e raio r.*

Observação

Em $X \neq \varnothing$, *com a métrica discreta,*

$$\bar{B}_r(x) = \{x\}, \quad se\ r < 1, \quad B_1(x) = \{x\},$$
$$\bar{B}_1(x) = X \quad e \quad B_r(x) = X, \quad se\ r > 1.$$

Em $X = \mathbb{R}$, *com a métrica usual,* $B_1(0) = (-1, 1)$ *e, em* $X = [0, 2]$, *com métrica induzida,* $B_1(0) = [0, 1)$.

Definição (Conjuntos limitados)

Dado um subconjunto M de um espaço métrico (X, ρ) o seu **diâmetro** $\operatorname{diam}(M)$ *é definido por*

$$\operatorname{diam}(M) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in M\}.$$

Diremos que M é limitado se $\operatorname{diam}(M)$ é finito e que M é ilimitado caso contrário.

Definição (Abertos)

Seja (X, ρ) *um espaço métrico.*
Um subconjunto A de X $(A \subset X)$ *será dito aberto em* (X, ρ) *se,*
para cada $x \in A$, *existir* $r_x > 0$ *tal que* $B_{r_x}(x) \subset A$.

Definição (Fechados)

Seja (X, ρ) *um espaço métrico. Um subconjunto F de X* $(F \subset X)$ *será dito fechado em* (X, ρ) *se* F^c *é aberto em* (X, ρ).

Conjuntos unitários ou finitos serão sempre fechados.

Proposição (Propriedades dos abertos)

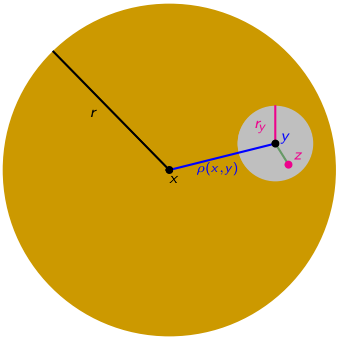
Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então,

(a) *X e $\varnothing$ são abertos.*

(b) *Dados $x \in X$ e $r > 0$ a bola aberta $B_r(x)$ é um conjunto aberto.*

(c) *A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

(d) *A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*


r
r_y
y
z
$\rho(x,y)$
x

Proposição (Propriedades dos fechados)

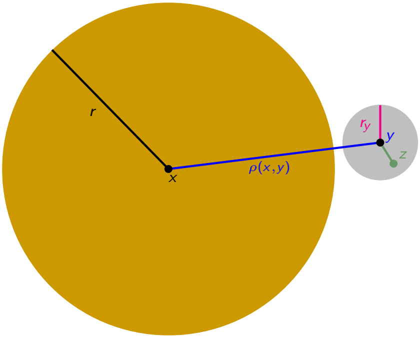
Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então,

(a) *X e $\emptyset$ são fechados.*

(b) *Dados $x \in X$ e $r > 0$ a bola fechada $\bar{B}_r(x)$ é fechada.*

(c) *A interseção qualquer de fechados é fechada.*

(d) *A união de um número finito de fechados é fechada.*


r
x
$\rho(x,y)$
r_y
y
z

Interior, Fecho, Pontos Isolados e Pontos de Acumulação

Definição (Interior e fecho)

Seja (X, ρ) um espaço métrico e $E \subset X$.

- (i) *O interior E^o de um conjunto $E \subset X$ é a união de todos os abertos contidos em E. E é aberto $\Leftrightarrow$ $E = E^o$.*
- (ii) *O fecho E^- de um conjunto $E \subset X$ é a interseção de todos os fechados contendo E. E é fechado $\Leftrightarrow$ $E = E^-$.*
- (iii) *Um conjunto $E \subset X$ é dito denso em X se $E^- = X$ e nunca denso se $E^{-o} = \varnothing$.*
- (iv) *Um ponto $x \in X$ é dito um ponto de fronteira de E se $B_r(x) \cap E \neq \varnothing \neq B_r(x) \cap E^c$, $\forall\ r > 0$. Notação ∂E.*

Definição (Convergência de seqüências)

Uma seqüência $\{x_n\}$ em (X,ρ) será convergente para $x \in X$ se, e somente se, a seqüência numérica $\{\rho(x_n,x)\}$ convergir para zero $(\rho(x_n,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0)$. Escreveremos $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Proposição

Se (X,ρ) é um espaço métrico e $E \subset X$, são equivalentes:

(1) $x \in E^-$

(2) $B_r(x) \cap E \neq \varnothing$, *para todo* $r > 0$,

(3) *existe uma seqüência* $\{x_n\}$ *em* E *tal que* $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Definição (Pontos isolado e ponto de acumulação)

Seja (X, ρ) *um espaço métrico.*

(a) *Um ponto* $x \in X$ *é chamado* **ponto de acumulação de** $E \subset X$ *se, e somente se,* $(B_r(x) \cap E) \backslash \{x\} \neq \varnothing$, *para todo* $r > 0$.

(b) *Um ponto* $x \in E \subset X$ *é chamado* **ponto isolado de** E *se, e somente se, existir* $r > 0$ *tal que* $B_r(x) \cap E = \{x\}$.

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se $E \subset X$, denotarmos por E' (derivado de E) o conjunto dos pontos te acumulação de E. Então

(a) $E^- = E^o \cup \partial E$,

(b) $E^- = E \cup (\partial E \cap E')$ *e*

(c) $E^o = E \backslash \partial E$.

(d) ∂E *é fechada.*

Funções Contínuas

Definição

Sejam (X, ρ), (Y, σ) *são espaços métricos.*
Uma função $f : X \to Y$ *é contínua em* $x \in X$ *se, e somente se, dado* $\epsilon > 0$, *existir* $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ *tal que* $\rho(x', x) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x'), f(x)) < \epsilon$.

Diremos, simplesmente, que f será contínua quando for contínua para todo $x \in X$ *e uniformemente contínua se a escolha de* δ *depender somente de* ϵ *e não de* $x \in X$.

Definição

Sejam (X,ρ), (Y,σ) *espaços métricos. Se* $f : X \to Y$ *for tal que* $\sigma(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$, *para todo* $x_1, x_2 \in X$, f *será chamada uma imersão isométrica de* X *em* Y. *Uma* **isometria** *será uma imersão isométrica que for também* **sobrejetora**.

Teorema (*)

Um espaço métrico (X,ρ) *pode ser imerso isometricamente no espaço vetorial normado* $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ *das funções limitadas* $f : X \to \mathbb{R}$, *com a norma* $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

Prova: Fixe $x_0 \in X$ e tome $T : X \to \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ dada por:

$$(Tx)(z) = \rho(x, z) - \rho(x_0, z), \quad \text{para todo } z \in X.$$

Como, $(Tx)(x_0) = \rho(x, x_0)$, $|(Tx_1)(x_2) - (Tx_2)(x_2)| = \rho(x_1, x_2)$ e, para todo $z \in X$,

$$|(Tx)(z)| = |\rho(x, z) - \rho(x_0, z)| \leqslant \rho(x, x_0),$$

$$|(Tx_1)(z) - (Tx_2)(z)| = |\rho(x_1, z) - \rho(x_2, z)| \leqslant \rho(x_1, x_2)$$

segue que $\|Tx\|_\infty = \rho(x, x_0)$ e $\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty = \rho(x_1, x_2)$. $\square$

Caracterização topológica da continuidade

Proposição

Sejam (X, ρ), (Y, σ) espaços métricos.
Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se,
$f^{-1}(U)$ é aberto em (X, ρ) sempre que U é aberto em (Y, σ).

Caracterização por seqüências da continuidade

Proposição

Sejam (X, ρ), (Y, σ) espaços métricos.

Uma função $f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se,

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ em } X \Longrightarrow f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \text{ em } Y.$$

A composta e a restrição

Proposição (Composta)

Sejam (X,ρ), (Y,σ) *e* (Z,μ) *espaços métricos,* $g : X \to Y$ *contínua em* $x \in X$ *e* $f : Y \to Z$ *contínua em* $g(x) \in Y$.
Então, a composta $f \circ g : X \to Z$, *de* f *e* g, *definida por* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *é contínua em* x.

Proposição (Restrição)

Sejam (X,ρ), (Y,σ) *espaços métricos e* $f : X \to Y$ *uma função.*
Se f *é contínua em* $x \in M \subset X$, *a restrição de* f *a* M *é contínua em* x.

Topologias

Definição

Se $X \neq \varnothing$, $\mathcal{T}(X) \subset 2^X$ *será chamanda uma topologia em* X *se*

(*i*) X *e* $\varnothing$ *estão em* $\mathcal{T}(X)$,

(*ii*) *A união qualquer de elementos de* $\mathcal{T}(X)$ *pertencer a* $\mathcal{T}(X)$ *e*

(*iii*) *A interseção finita de elementos de* $\mathcal{T}(X)$ *pertencer a* $\mathcal{T}(X)$.

Neste caso, os elementos de $\mathcal{T}(X)$ *serão chamados abertos e o par* $(X, \mathcal{T}(X))$ *será chamado espaço topológico.*

Comparação entre topologias

Definição

Seja $X \neq \varnothing$ um conjunto e $\mathcal{T}_i(X)$, $i = 1, 2$, duas topologias em X.
Diremos que $\mathcal{T}_1(X)$ é mais fina que $\mathcal{T}_2(X)$ se $\mathcal{T}_1(X) \supset \mathcal{T}_2(X)$.

Seja (X, ρ) um espaço métrico e

$$\mathcal{T}_\rho(X) = \{O \subset X : O \text{ é aberto em } (X, \rho)\}.$$

Já vimos que $\mathcal{T}_\rho$ é uma topologia. Esta topologia será chamada topologia induzida pela métrica ρ.

Topologias e funções contínuas

Proposição

Sejam (X, ρ) (Y, σ) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função.

Defina em X a topologia induzida por f

$$\mathcal{T}_f(X) = \{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{T}_\sigma(Y)\}.$$

Então f é contínua se, e somente se, $\mathcal{T}_\rho(X)$ é mais fina que $\mathcal{T}_f(X)$.

Continuidade para funções de um espaço topológico em outro.

Espaços Conexos

Definição

Um espaço métrico (X, ρ) será conexo se, e somente se, X não for união de dois subconjuntos abertos disjuntos e não vazios de X.

Seja $A \subset X$ e ρ_A a métrica induzida em A ela métrica ρ de X. Se (A, ρ_A) for conexo, diremos que A será conexo.

Proposição

Seja (X, ρ) espaço métrico. São equivalentes:

(1) *X é conexo;*

(2) *X e $\varnothing$ são os únicos subconjuntos de X que são, ao mesmo tempo, abertos e fechados.*

(3) *Se $A \subset X$ tem fronteira vazia, então $A = X$ ou $A = \varnothing$.*

Conexidade como invariante topológico

Proposição

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos. Se (X, ρ) for conexo, $f : X \to Y$ for contínua e sobrejetora, então (Y, σ) será conexo.

Imagem de conexo por função contínua é conexo.

Corolário (A conexidade é um invariante topológico)

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos homeomorfos. Então (X, ρ) será conexo se, somente se, (Y, σ) for conexo.

Fecho, união e produto

Proposição (Fecho)

Sejam (X, ρ) um espaço métrico. Se $E \subset X$ for conexo, então E^- será conexo.

Corolário

Sejam (X, ρ) um espaço métrico e $E \subset F \subset E^- \subset X$. Se E for conexo, então F será conexo.

Exemplo

S^1, $\mathbb{R}$, Intervalos de $\mathbb{R}$, Bolas em espaços vetoriais normados.

Proposição (União 'com interseção não vazia')

Seja (X,ρ) *um espaço métrico.*

Se $\{A_i : i \in I\}$ *for uma família de conjuntos conexos e* $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$,

então $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ *será conexo.*

Corolário

Um espaço métrico (X,ρ) *será conexo se, e somente se, quaisquer*

dois pontos de X *estiverem contidos em algum subconjunto conexo.*

Proposição (Produto)

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos, $\Pi = X \times Y$ e (Π, π_p) o espaço produto. Então, Π será conexo se, e somente se, X e Y forem conexos.

Teorema da Alfândega

Proposição (Teorema da Alfândega)

Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico (X, ρ).

Se A é conexo, $A \cap B \neq \varnothing$ e $A \cap B^c \neq \varnothing$, então $A \cap \partial B \neq \varnothing$.

Conexos por Caminhos

Definição (Caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Um caminho em (X, ρ) é uma função contínua $\gamma : [0, 1] \to X$.*
- *Se $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$, a é o ponto inicial e b o ponto final do caminho e diremos que o caminho liga 'a' a 'b'.*
- *Se $a = b$ diremos que o caminho será fechado.*

Definição (Conexo por caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Diremos que (X, ρ) será conexo por caminhos se, e somente se, dados dois pontos $a,b \in X$ existir um caminho que liga 'a' a 'b'.*
- *Seja $E \subset X$ e ρ_E a métrica induzida em E por ρ. Diremos que E será conexo por caminhos se, e somente se, (E, ρ_E) for conexo por caminhos.*

Proposição

Todo espaço métrico (X, ρ) conexo por caminhos é conexo.

Proposição (Imagem por função contínua)

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos.

Se (X, ρ) for conexo por caminhos e existir uma função contínua e sobrejetora $f : X \to Y$, então (Y, σ) será conexo por caminhos.

Proposição (União 'com interseção não vazia')

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Se $\{A_i : i \in I\}$ for uma família de conexos por caminhos de X e $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, então $\cup_{i \in I} A_i$ será conexo por caminhos.

Proposição (Produto)

Sejam (X, ρ) (Y, σ) espaços métricos, $\Pi = X \times Y$ e (Π, π_p).

Então, Π será conexo por caminhos se, e só se, X e Y o forem.

Localmente conexos por caminhos

Definição

Um espaço métrico (X, ρ) será localmente conexo por caminhos se, e somente se, para todo $x \in X$, e aberto V_x com $x \in V_x$ existir um aberto e conexo por caminhos $x \in U_x \subset V_x$.

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico localmente conexo por caminhos. Então (X, ρ) será conexo por caminhos, se e só se, for conexo.

Componentes conexas

Definição

Seja (X, ρ) espaço métrico e $x \in X$.

A componente conexa C_x de x em X é a união de todos os subconjuntos conexos de X que contêm x.

C_x é fechada e $C_x \cap C_y = \varnothing$ ou $C_x = C_y$.

Espaços Métricos Completos

Definição

Seja (X, ρ) um espaço métrico. $\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}}$ será chamada uma **seqüência de Cauchy** *se, e somente se,*

$$\rho(x_n, x_m) \xrightarrow{m,n\to\infty} 0.$$

Definição

Seja (X, ρ) um espaço métrico e $E \subset X$.

E será **completo** *se, e somente se, toda seqüência de Cauchy de elementos de E for convergente em E.*

Exemplo

(1) *$\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.*

(2) *(X,ρ) com $X \neq \varnothing$ e ρ é a métrica discreta em X é completo.*

(3) *Em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $\mathbb{R}^n$ é completo enquanto que $\mathbb{Q}^n$ não é.*

(4) *$X = (0,1)$ com a métrica usual não é completo.*

(5) *$C([a,b],\mathbb{R})$ com a norma $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ é completo.*

(6) *ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, é um espaço métrico completo.*

Proposição

Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo e um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.

Ser fechado não implica ser completo, a menos que X o seja.

Teorema

Se (X,ρ) for um espaço métrico, o espaço vetorial normado $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})=\{f:X\to\mathbb{R} : \sup_{x\in X}|f(x)|<\infty\}$, com norma $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$, será completo.

Completamento

Teorema (Completamento e sua 'unicidade')

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então,

(1) *(X, ρ) será isométrico a um subconjunto denso de um espaço métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$,*

(2) *se (X, ρ) for isométrico a subconjuntos densos de espaços completos $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ e $(\check{X}, \check{\rho})$, $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ e $(\check{X}, \check{\rho})$ serão isométricos.*

Espaços de Banach

Definição

Um espaço vetorial normado que for completo, com a métrica induzida pela norma, será chamado **espaço de Banach**.

Exemplo

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ for um espaço vetorial normado, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço vetorial normado das funções $T : X \to Y$ lineares e limitadas, isto é, com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

então $\mathcal{L}(X,Y)$ será um espaço de Banach.

Contrações e Aplicações

Definição

Seja (X, ρ) um espaço métrico completo.

Uma aplicação $T : X \to X$ será chamada uma contração em X

se existir $0 < \kappa < 1$, tal que

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant \kappa\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Teorema (Princípio da Contração de Banach)

Se X for um espaço métrico completo e T uma contração em X então, T terá um único **ponto fixo** *em X, isto é, existirá um único $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = x_0$.*

Corolário

Seja (X, ρ) um espaço métrico completo. Se $T: X \to X$ e T^{n_0} for uma contração, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ então, T terá um único ponto fixo.