Espaços Métricos
Espaços Métricos Completos: Categoria de Baire - Aplicações
Aula 15

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

21 de Outubro de 2020

Segundo Semestre de 2020

Categoria de Baire

Definição (Categoria)

Um conjunto $A \subset X$ será de **Primeira Categoria** *em X se for união enumerável de conjuntos nunca densos, caso contrário ele será de* **Segunda Categoria** *em X.*

É uma conseqüência imediata desta definição que

Proposição

(X, ρ) será de segunda categoria nele mesmo se, e somente se, em qualquer representação de X como união enumerável de fechados, pelo menos um deles contém uma bola aberta.

Teorema (Baire)

Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.

Prova: Suponha que não, isto é, que

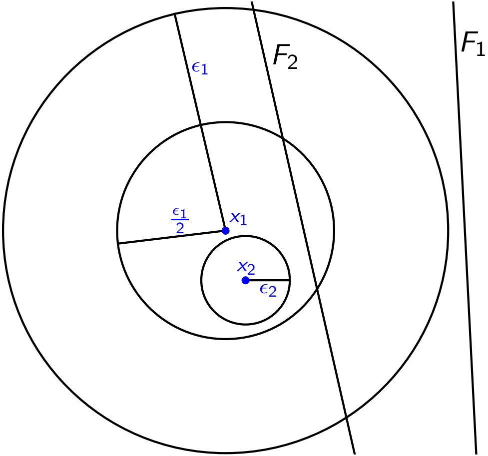
$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

com cada F_i fechado e de interior vazio.

Então $X \backslash F_1$ é não vazio e aberto. Seja x_1 e $0 < \epsilon_1 < 1$ tal que $x_1 \in X \backslash F_1$ e $B_{\epsilon_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset$.

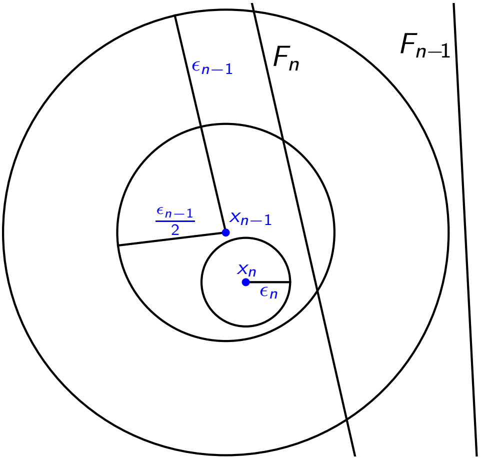
Como $B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1) \subsetneq F_2$, existe $x_2 \in B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1)$ e $\epsilon_2 < \frac{1}{2}$ tal que

$$B_{\epsilon_2}(x_2) \cap F_2 = \emptyset \text{ e } B_{\epsilon_2}(x_2) \subset B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1).$$



Indutivamente existe x_n, $\epsilon_n < \frac{1}{2^{n-1}}$ tais que $x_n \in B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1})$

$$B_{\epsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset \text{ e } B_{\epsilon_n}(x_n) \subset B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1}).$$



A seqüência $\{x_n\}$ é de Cauchy pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$ e $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como X é completo $\{x_n\}$ é convergente. Seja x o seu limite. Para cada n fixo $x \in B_{\epsilon_n}(x_n)$ pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$. Logo $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ o que é uma contradição. $\square$

Exemplo

Todo espaço de Banach é de segunda cateoria nele mesmo.

Funções contínuas nunca diferenciáveis

Exemplo

Em $C([0,1],\mathbb{R})$ *existem funções que não são diferenciáveis em nenhum ponto de* $[0,1]$.

Considere o subespaço $C_p([0,1],\mathbb{R}) = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = f(1)\}$ de $C([0,1],\mathbb{R})$ com a norma $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. É fácil ver que $C_p([0,1],\mathbb{R})$ é completo.

Mostraremos que o conjunto D das funções de $C_p([0,1],\mathbb{R})$ que são diferenciáveis em pelo menos um ponto de $[0,1]$ é de primeira categoria em X.

$C_p([0,1],\mathbb{R})$ é isométrico a $X = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f$ é 1 periódica$\}$.

Considere o conjunto

$$K = \left\{ f \in X : \sup\left\{\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} : 0 \neq h \in [-1,1]\right\} < \infty, \text{para algum } x \in \mathbb{R}\right\}.$$

É claro que $D \subset K|_{[0,1]}$. Seja

$$K_i = \left\{ f \in X : \sup\left\{\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} : 0 \neq h \in [-1,1]\right\} \leqslant i, \text{para algum} x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Como $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_i$, se $K_i^- = K_i$ e $K_i^o = \varnothing$, K será de primeira categoria.

Do Teorema de Baire $X \supsetneq K$.

Se $f \in K_i^-$, existe uma seqüência $f_n \in X$ e $x_n \in [0,1]$ tal que

$$\sup\left\{\frac{|f_n(x_n+h)-f_n(x_n)|}{|h|} : h \in [-1,1]\setminus\{0\}\right\} \leqslant i$$

Podemos assumir que $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x} \in [0,1]$. Logo, para $h \in [-1,1]\setminus\{0\}$,

$$\frac{|f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})|}{|h|} \leqslant \frac{|f(\bar{x}+h)-f(x_n+h)|}{|h|} + \frac{|f(x_n+h)-f_n(x_n+h)|}{|h|}$$

$$+ \frac{|f_n(x_n+h)-f_n(x_n)|}{|h|} + \frac{|f_n(x_n)-f(x_n)|}{|h|} + \frac{|f(x_n)-f(\bar{x}))|}{|h|}$$

$$\leqslant \frac{|f(\bar{x}+h)-f(x_n+h)|}{|h|} + \frac{2}{|h|}\|f-f_n\|_X + i + \frac{|f(x_n)-f(\bar{x}))|}{|h|}$$

Fazendo $n \to \infty$, $\dfrac{|f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})|}{|h|} \leqslant i, \forall\ 0 \neq h \in [-1,1]$ e $f \in K_i$.

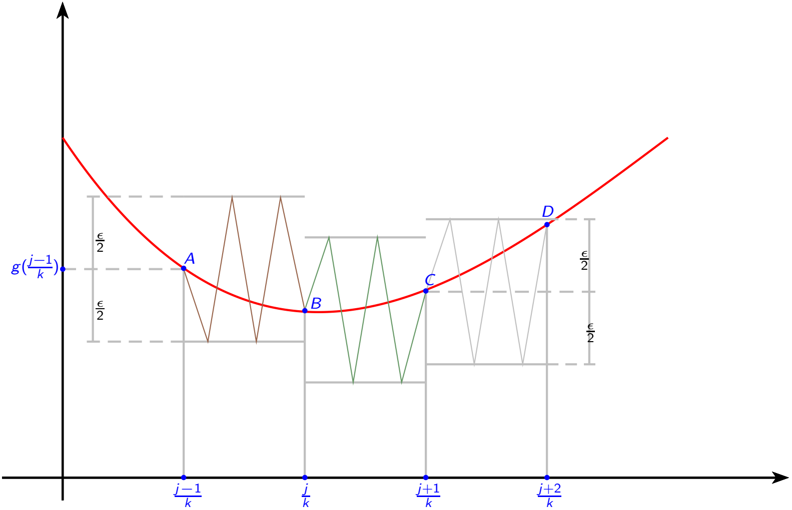
Isto mostra que K_i é fechado.

Para mostrar que $K_i^o = \varnothing$, vamos mostrar que K_i^c é denso.

Seja $g \in X$, $\epsilon > 0$ e considere uma partição de $[0,1]$ em $k = k(\epsilon)$

intervalos de comprimento $\frac{1}{k}$ de forma que

$$|g(x) - g(x')| < \tfrac{\epsilon}{2},\ \ x, x' \in [\tfrac{j-1}{k}, \tfrac{j}{k}],\ 1 \leqslant j \leqslant k.$$



A função g_ϵ definida pela poligonal dista menos que ϵ de g

Defina $g_\epsilon \in K_i^c$ da seguinte forma:

(1) $g_\epsilon(\frac{j-1}{k}) = g(\frac{j-1}{k})$, $1 \leqslant j \leqslant k+1$.

(2) Em $[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}]$, o gráfico de g_ϵ será uma poligonal unindo $(\frac{j-1}{k}, g(\frac{j-1}{k}))$ a $(\frac{j}{k}, g(\frac{j}{k}))$, de forma que, os demais vértices estão em $[0,1] \times \{g(\frac{j-1}{k}) - \epsilon, g(\frac{j-1}{k}) + \epsilon\}$.

(3) A inclinação de cada dos segmentos da poligonal excede i.

Segue que $g_\epsilon \in X$, $\|g_\epsilon - g\| < \epsilon$ e que $g \in K_i^c$. Isto mostra que K_i^c é denso ou, equivalentemente, $K_i^0 = \varnothing$.

Os Teoremas das funções implícita e inversas

Definição (Derivada de Frechét)

Sejam $(Z, \|\cdot\|_Z)$ *e* $(W, \|\cdot\|_W)$ *espaços de Banach.*

Uma função $T : Z \to W$ *será Frechét diferenciável em* $z_0 \in Z$ *se, e somente se, existir* $\partial T(z_0) \in \mathcal{L}(Z, W)$ *tal que*

$$\frac{\|T(z) - T(z_0) - \partial T(z_0)(z - z_0)\|_W}{\|z - z_0\|_Z} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

O operador $\partial T(z_0)$ *será chamado Derivada de Frechét de* T *em* z_0*.*

Definição (Funções Continuamente Diferenciáveis)

Se T for diferenciável em todos os pontos de $G \subset Z$, a função

$$G \ni g \mapsto \partial T(g) \in \mathcal{L}(Z, W), \quad \textit{denotada por } \partial T,$$

será chamada de função derivada de Frechét.

Diremos que T será continuamente diferenciável em G se for diferenciável em todos os pontos de G e $\partial T : G \to \mathcal{L}(Z, W)$ for contínua.

Note que, se $T : G \subset Z \to W$ for continuamente diferenciável e $z_1, z_2 \in G$ forem tais que $\{z(t) = tz_1 + (1-t)z_2 : t \in (a,b)\} \subset G$ então, $(a,b) \ni t \mapsto T(z(t))$ será continuamente diferenciável e

$$\frac{d}{dt}T(z(t)) = \partial T(z(t))\,(z_1 - z_2), \quad t \in (a,b),$$

onde

$$\frac{d}{dt}T(z(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{T(z(t+h)) - T(z(t))}{h}.$$

Isto segue diretamente da definição de derivada de Frechét.

Derivadas Parciais

Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços de Banach.

Se $F: G \subset X \times Y \to Y$ for Frechét diferenciável em $(x_0, y_0) \in G$,

$$\partial F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X \times Y, Y), \text{ e}$$

$$\partial F(x_0, y_0)(h, k) = \partial F(x_0, y_0)(h, 0) + \partial F(x_0, y_0)(0, k).$$

Defina a derivada parcial com respeito a x, $\boxed{\partial_x F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Y)}$

e a derivada parcial com respeito a y, $\boxed{\partial_y F(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y) \text{ por}}$

$$\boxed{\partial_x F(x_0, y_0)h = \partial F(x_0, y_0)(h, 0)} \text{ e } \boxed{\partial_y F(x_0, y_0)k = \partial F(x_0, y_0)(0, k).}$$

Sendo assim,

$$\frac{\|F(x_0+h, y_0+k) - F(x_0, y_0) - \partial_x F(x_0, y_0)h + \partial_y F(x_0, y_0)k\|}{\|h\|_X + \|k\|_Y}$$

$$= \frac{\|F(x_0+h, y_0+k) - F(x_0, y_0) - \partial F(x_0, y_0)(h, k)\|}{\|(h, k)\|_{X\times Y}} \overset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$