Espaços Métricos
Espaços Métricos Completos
Contrações e Aplicaçoes: Teorema de Picard
Aula 14

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

10 de Outubro de 2022

Segundo Semestre de 2022

Definição

Um espaço vetorial normado que for completo, com a métrica induzida pela norma, será chamado ***espaço de Banach***.

Exemplo

Já sabemos que:

(1) $\mathbb{R}^n$ *com a norma* $\|\cdot\|_p$ *é um espaço de Banach.*

(2) *Se* (X,ρ) *for métrico,* $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}^n)$, *com* $\|f\| = \sup\limits_{x\in X}\|f(x)\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *será Banach.*

(3) ℓ_p, *com a norma* $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *é um espaço de Banach.*

(4) $C([0,1],\mathbb{R}^n)$, *com a norma* $\|f\| = \sup\limits_{t\in[a,b]}\|f(t)\|_p$, *é Banach.*

Exemplo

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ for um espaço vetorial normado, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial normado das funções $T : X \to Y$ lineares e limitadas, isto é, com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

então $\mathcal{L}(X, Y)$ será um espaço de Banach.

Contrações e Aplicações

Definição

Seja (X, ρ) um espaço métrico completo.

Uma aplicação $T : X \to X$ será chamada uma contração em X se existir $0 < \kappa < 1$, tal que

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant \kappa\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Teorema (Princípio da Contração de Banach)

Se X for um espaço métrico completo e T uma contração em X então, T terá um único **ponto fixo** *em X, isto é, existirá um único $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = x_0$.*

Corolário

Seja (X,ρ) um espaço métrico completo. Se $T\colon X\to X$ e T^{n_0} for uma contração, para algum $n_0\in\mathbb{N}$ então, T terá um único ponto fixo.

Aplicação - Teorema de Picard

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto conexo e $f : D \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|, \quad \forall (t,x_i) \in D, \ i = 1,2.$$

Suponha ainda que f seja contínua.

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t,x). \tag{1}$$

Definição

Se $(t_0, x_0) \in D$, *uma solução local de* (1) *passando por* x_0 *no instante* t_0 *é uma função* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *que satisfaz:*

(a) $t_0 \in I^o$ e $\varphi(t_0) = x_0$,

(b) $(t, \varphi(t)) \in D$, *para todo* $t \in I$,

(c) ϕ *é contínuamente diferenciável e*

(d) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$.

Teorema (Picard)

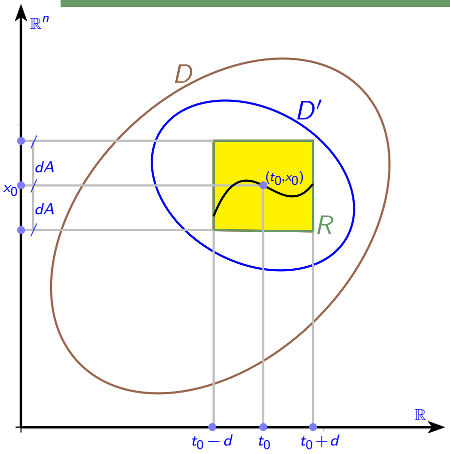
Se f é como acima, para cada $(t_0, x_0) \in D$, a equação diferencial (1) possui uma única solução local por (t_0, x_0).

Prova: É fácil ver que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução local de (1) por (t_0, x_0) se, e somente se, φ é uma função contínua definida em um intervalo I, $t_0 \in I^o$, satisfazendo $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad t \in I. \tag{2}$$

Seja $(t_0, x_0) \in D' \subset D$, D' aberto e tal que f é limitada em D'; isto é, $|f(t,x)| \leqslant A$, $\forall (t,x) \in D'$. Seja $d > 0$ tal que

$$R = [t_0 - d, t_0 + d] \times B_{dA}(x_0)^{-} \subset D' \quad \text{e} \quad Md < 1.$$



Se $J =: [t_0 - d, t_0 + d]$ definimos

$$\mathcal{B} := \{\psi \in C(J, \mathbb{R}^n) : \psi(t_0) = x_0 \ \text{ e } \ |\psi(t) - x_0| \leqslant dA, \ \forall t \in J\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é um subconjunto fechado de $C(J, \mathbb{R}^n)$ e portanto um subespaço métrico completo.

Seja $T : \mathcal{B} \to C(J, \mathbb{R}^n)$ definida por

$$(T\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds, \quad t \in J, \ \psi \in \mathcal{B}. \tag{3}$$

Mostremos que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ e que T é uma contração. De fato:

Se $\psi \in \mathcal{B}$ então $T\psi$ é contínua, $(T\psi)(t_0) = x_0$ e

$$|(T\psi)(t) - x_0| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi(s))| dt \right| \leqslant dA, \quad \forall t \in J,$$

mostrando que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$.

Agora, para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ e $\forall t \in J$,

$$|(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))| ds \right|$$

$$\leqslant M \left| \int_{t_0}^{t} |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \right|$$

$$\leqslant Md \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty,$$

mostrando que T é uma contração em $\mathcal{B}$. Segue do Princípio da Contração de Banach que T tem um único ponto fixo e que (1) tem uma única solução por (t_0, x_0). $\square$