Espaços Métricos
Categoria de Baire e Aplicações: Teorema da Aplicação Aberta e Funções Contínuas Nunca Diferenciáveis

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Categoria de Baire

Se (X, ρ) for um espaço métrico, recorde que um conjunto $A \subset X$ será *nunca denso* se o seu fecho tem interior vazio.

A união de um número finito de conjuntos nunca densos é um conjunto nunca denso.

Contudo, a união enumerável de conjuntos nunca denso não precisa ser nunca denso.

Definição

Um conjunto $A \subset X$ será de Primeira Categoria em X se for união enumerável de conjuntos nunca densos, caso contrário ele será de Segunda Categoria em X.

É uma conseqüência imediata desta definição que

Proposição

(X, ρ) será de segunda categoria nele mesmo se, e somente se, em qualquer representação de X como união enumerável de fechados, pelo menos um deles contém uma bola aberta.

Teorema (Baire)

Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.

Prova: Suponha que não, isto é, que

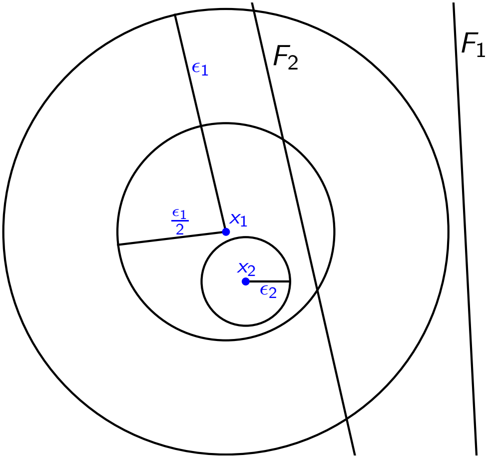
$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

com cada F_i fechado e de interior vazio.

Então $X \backslash F_1$ é não vazio e aberto. Seja x_1 e $0 < \epsilon_1 < 1$ tal que $x_1 \in X \backslash F_1$ e $B_{\epsilon_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset$.

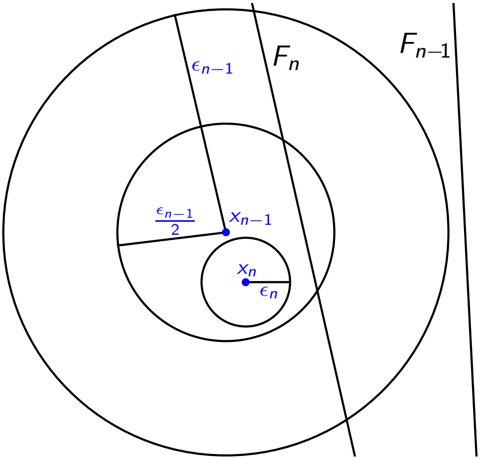
Como $B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1) \not\subset F_2$, existe $x_2 \in B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1)$ e $\epsilon_2 < \frac{1}{2}$ tal que

$$B_{\epsilon_2}(x_2) \cap F_2 = \emptyset \text{ e } B_{\epsilon_2}(x_2) \subset B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1).$$



Indutivamente existe x_n, $\epsilon_n < \frac{1}{2^{n-1}}$ tais que $x_n \in B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1})$

$B_{\epsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$ e $B_{\epsilon_n}(x_n) \subset B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1})$.



A seqüência $\{x_n\}$ é de Cauchy pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$ e $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como X é completo $\{x_n\}$ é convergente. Seja x o seu limite. Para cada n fixo $x \in B_{\epsilon_n}(x_n)$ pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$. Logo $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ o que é uma contradição. $\square$

Exemplo

Todo espaço de Banach é de segunda cateoria nele mesmo.

Aplicações do Teorema de Baire

Definição (Aplicação Aberta e Fechada)

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear.

(1) *Diremos que T será aberta se $T(U)$ for aberto em Y, sempre que U for aberto em X.*

(2) *Diremos que T será fechada se $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ for fechado em $X \times Y$.*

Teorema da Aplicação Aberta

Teorema (da Aplicação Aberta)

Seja X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado.

Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $T(X)$ for de segunda categoria em Y então,

(a) *T será sobrejetora,*

(b) *T será aberta e*

(c) *Y será de segunda Categoria.*

Corolário

Sejam X e Y espaços de Banach.

(1) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for sobrejetora então, T será aberta.*

(2) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for bijetora então, T será um isomorfismo.*

Lema

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear então, são equivalentes:

a) *T é uma aplicação aberta;*

b) *Existe $r > 0$ tal que $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$.*

Prova: É claro que $a \Rightarrow b$. Provaremos que $b \Rightarrow a$. Assumindo b), mostremos que, se $U \subset X$ for aberto, $Tx \in T(U)^o$, para todo $x \in U$.

De fato, dado $x \in U$, seja $s > 0$ tal que $B_s^X(x) \subset U$ e

$$T(U) \supset T(B_s^X(x)) = T(x + sB_1^X(0)) = Tx + sT(B_1^X(0))$$
$$\supset Tx + sB_r^Y(0) = Tx + B_{sr}^Y(0) = B_{sr}^Y(Tx)$$

mostrando Tx é interior a $T(U)$. $\square$

Lema

Se X for Banach, Y for um espaço vetorial normado e $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ for tal que, para algum $r>0$,

$$B_r^Y(0)\subset[T(B_1^X(0))]^-$$

então,

$$B_{\frac{r}{2}}^Y(0)\subset T(B_1^X(0)).$$

Prova: Como T é linear, se $\|y\|<r2^{-n}$ então, $y\in[T(B_{2^{-n}}^X(0))]^-$. Se $\|y\|<\frac{r}{2}$, seja $x_1\in B_{\frac{1}{2}}^X(0)$ tal que $\|y-Tx_1\|<\frac{r}{4}$. Indutivamente, seja $x_n\in B_{2^{-n}}^X(0)$ tal que $\|y-\sum_{j=1}^n Tx_j\|<r2^{-n-1}$. Como X é completo a série será $\sum x_n$ convergente. Se x for a sua soma, $\|x\|<\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}=1$ e $y=Tx$. Logo $T(B_1^X(0))\ni y$, se $\|y\|<\frac{r}{2}$. $\square$

Prova (Teorema da Aplicação Aberta):

Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^X(0)$, $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^X(0))$ é de segunda

categoria em Y e $Y \ni y \to ny \in Y$ é um homeomorfismo que

leva $T(B_1^X(0))$ em $T(B_n^X(0))$.

Do Teorema de Baire $T(B_1^X(0))$ não pode ser nunca denso. Isto é,

existe $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tal que $B_{2r}^Y(y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Segue que $B_{2r}^Y(-y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$ e que $B_{2r}^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Dos Lemas anteriores $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$ e T é aberta. $\square$

Funções contínuas nunca diferenciáveis

Exemplo

Em $C([0,1],\mathbb{R})$ existem funções que não são diferenciáveis em nenhum ponto de $[0,1]$.

Considere o subespaço $C_p([0,1],\mathbb{R}) = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = f(1)\}$ de $C([0,1],\mathbb{R})$ com a norma $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. É fácil ver que $C_p([0,1],\mathbb{R})$ é completo.

Mostraremos que o conjunto D das funções de $C_p([0,1],\mathbb{R})$ que são diferenciáveis em pelo menos um ponto de $[0,1]$ é de primeira categoria em X.

$C_p([0,1],\mathbb{R})$ é isométrico a $X=\{f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}): f$ é 1 periódica$\}$.

Considere o conjunto

$$K=\left\{f\in X : \sup\left\{\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} : 0\neq h\in[-1,1]\right\}<\infty, \text{para algum } x\in\mathbb{R}\right\}.$$

É claro que $D\subset K|_{[0,1]}$. Seja

$$K_i=\left\{f\in X : \sup\left\{\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|} : 0\neq h\in[-1,1]\right\}\leqslant i, \text{para algum } x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Como $K=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_i$, se $K_i^-=K_i$ e $K_i^o=\varnothing$, K será de primeira categoria.

Do Teorema de Baire $X\supsetneq K$.

Se $f \in K_i^-$, existe uma seqüência $f_n \in X$ e $x_n \in [0,1]$ tal que

$$\sup\left\{\frac{|f_n(x_n+h)-f_n(x_n)|}{|h|} : h\in[-1,1]\backslash\{0\}\right\} \leqslant i,\ \ \|f-f_n\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Podemos assumir que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}\in[0,1]$. Logo, para $h\in[-1,1]\backslash\{0\}$,

$$\frac{|f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})|}{|h|} \leqslant \frac{|f(\bar{x}+h)-f(x_n+h)|}{|h|} + \frac{|f(x_n+h)-f_n(x_n+h)|}{|h|}$$

$$+\frac{|f_n(x_n+h)-f_n(x_n)|}{|h|} + \frac{|f_n(x_n)-f(x_n)|}{|h|} + \frac{|f(x_n)-f(\bar{x}))|}{|h|}$$

$$\leqslant \frac{|f(\bar{x}+h)-f(x_n+h)|}{|h|} + \frac{2}{|h|}\|f-f_n\|_X + i + \frac{|f(x_n)-f(\bar{x}))|}{|h|}$$

Fazendo $n \to \infty$, $\dfrac{|f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})|}{|h|} \leqslant i, \forall\ 0 \neq h \in [-1,1]$ e $f \in K_i$.

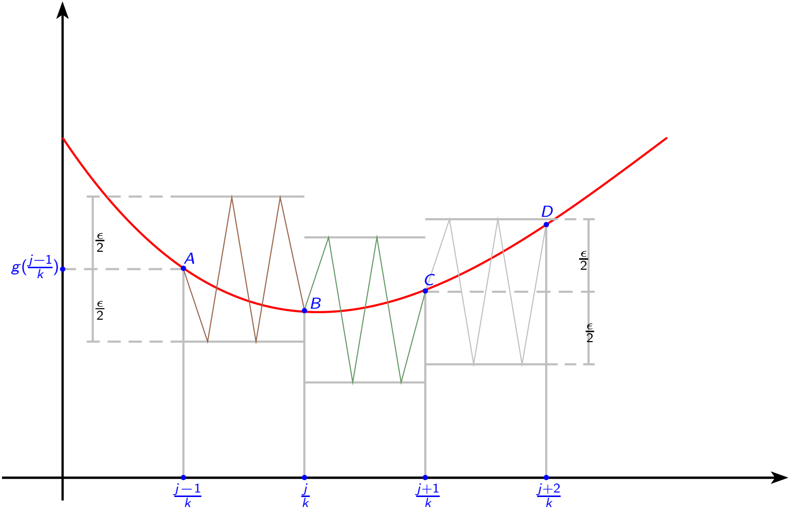
Isto mostra que K_i é fechado.

Para mostrar que $K_i^o = \varnothing$, vamos mostrar que K_i^c é denso.

Seja $g \in X$, $\epsilon > 0$ e considere uma partição de $[0,1]$ em $k = k(\epsilon)$

intervalos de comprimento $\frac{1}{k}$ de forma que

$$|g(x) - g(x')| < \tfrac{\epsilon}{2},\ \ x, x' \in [\tfrac{j-1}{k}, \tfrac{j}{k}],\ \ 1 \leqslant j \leqslant k.$$



A função g_ϵ definida pela poligonal dista menos que ϵ de g

Defina $g_\epsilon \in K_i^c$ da seguinte forma:

(1) $g_\epsilon(\frac{j-1}{k}) = g(\frac{j-1}{k})$, $1 \leqslant j \leqslant k+1$.

(2) Em $[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}]$, o gráfico de g_ϵ será uma poligonal unindo $(\frac{j-1}{k}, g(\frac{j-1}{k}))$ a $(\frac{j}{k}, g(\frac{j}{k}))$, de forma que, os demais vértices estão em $[0,1] \times \{g(\frac{j-1}{k}) - \epsilon, g(\frac{j-1}{k}) + \epsilon\}$.

(3) A inclinação de cada dos segmentos da poligonal excede i.

Segue que $g_\epsilon \in X$, $\|g_\epsilon - g\| < \epsilon$ e que $g \in K_i^c$. Isto mostra que K_i^c é denso ou, equivalentemente, $K_i^0 = \varnothing$.