# Espaços Métricos
# Espaços Métricos Completos: Princípio da Contração de Banach, Categoria de Baire e Aplicações
# Aula 13

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

05 de Outubro de 2022

**Segundo Semestre de 2022**

## Definição

*Um espaço vetorial normado que for completo, com a métrica induzida pela norma, será chamado* ***espaço de Banach****.*

## Exemplo

*Já sabemos que:*

(1) $\mathbb{R}^n$ *com a norma* $\|\cdot\|_p$ *é um espaço de Banach.*

(2) *Se* $(X,\rho)$ *for métrico,* $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}^n)$*, com* $\|f\| = \sup\limits_{x\in X}\|f(x)\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *será Banach.*

(3) $\ell_p$*, com a norma* $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *é um espaço de Banach.*

(4) $C([0,1],\mathbb{R}^n)$*, com a norma* $\|f\| = \sup\limits_{t\in[a,b]}\|f(t)\|_p$, *é Banach.*

## Exemplo

*Se* $(X, \|\cdot\|_X)$ *for um espaço vetorial normado,* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *um espaço de Banach e* $\mathcal{L}(X, Y)$ *o espaço vetorial normado das funções* $T : X \to Y$ *lineares e limitadas, isto é, com a norma*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

*então* $\mathcal{L}(X, Y)$ *será um espaço de Banach.*

# Contrações e Aplicações

## Definição

*Seja $(X,\rho)$ um espaço métrico completo.*
*Uma aplicação $T : X \to X$ será chamada uma contração em $X$ se existir $0 < \kappa < 1$, tal que*

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant \kappa\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

## Teorema (Princípio da Contração de Banach)

*Se $X$ for um espaço métrico completo e $T$ uma contração em $X$ então, $T$ terá um único* **ponto fixo** *em $X$, isto é, existirá um único $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = x_0$.*

**Prova:** Vamos primeiramente provar que $T$ tem no máximo um ponto fixo. Se $x$ e $y$ são pontos fixos de $T$, temos que

$$\rho(x,y) = \rho(Tx, Ty) \leqslant \kappa\rho(x,y)$$

e portanto $x = y$.

Agora mostramos a existência. Seja $x \in X$ e considere a *órbita*,

$$\{x, Tx, T^2x, \cdots\}, \quad \text{de } x.$$

Mostremos que $\{T^n x\}$ é uma seqüência de Cauchy. De fato:

$$\rho(T^{n+p}x, T^n x) \leqslant \kappa\rho(T^{n+p-1}x, T^{n-1}x) \leqslant \cdots \leqslant \kappa^n \rho(T^p x, x)$$

$$\leqslant \kappa^n[\rho(T^p x, T^{p-1}x) + \cdots + \rho(Tx, x)]$$

$$\leqslant \kappa^n[\kappa^{p-1}\rho(Tx, x) + \cdots + \rho(Tx, x)]$$

$$\leqslant \kappa^n[\kappa^{p-1} + \cdots + 1]\rho(Tx, x)$$

$$\leqslant \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\rho(Tx, x).$$

Como $\kappa < 1$ temos que $\{T^n x\}$ é uma seqüência de Cauchy e portanto convergente para algum $x_0 \in X$. Mostremos que $x_0$ é um ponto fixo de $T$. De fato:

$$Tx_0 = T \lim_{n\to\infty} T^n x = \lim_{n\to\infty} T^{n+1} x = x_0. \quad \square$$

**Corolário**

*Seja $(X,\rho)$ um espaço métrico completo. Se $T\colon X\to X$ e $T^{n_0}$ for uma contração, para algum $n_0\in\mathbb{N}$ então, $T$ terá um único ponto fixo.*

**Prova:** Do Princípio da Contração de Banach, $T^{n_0}$ tem um único ponto fixo $x^*$ em $X$. Como $T^{n_0}(Tx^*)=T(T^{n_0}x^*)=Tx^*$ e $Tx^*$ também será um ponto fixo de $T^{n_0}$. Logo $Tx^*=x^*$. $\square$

# Aplicação - Teorema de Picard

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto conexo e $f : D \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|, \quad \forall (t,x_i) \in D, \; i = 1,2.$$

Suponha ainda que $f$ seja contínua.

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t,x). \tag{1}$$

## Definição

*Se $(t_0, x_0) \in D$, uma solução local de (1) passando por $x_0$ no instante $t_0$ é uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz:*

(a) $t_0 \in I^o$ e $\varphi(t_0) = x_0$,

(b) $(t, \varphi(t)) \in D$, para todo $t \in I$,

(c) $\phi$ é contínuamente diferenciável e

(d) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$.

## Teorema (Picard)

*Se $f$ é como acima, para cada $(t_0, x_0) \in D$, a equação diferencial (1) possui uma única solução local por $(t_0, x_0)$.*

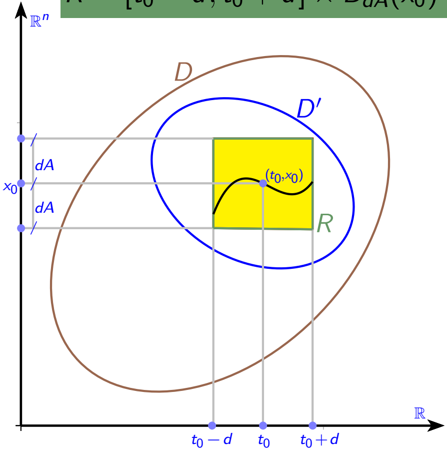
**Prova:** É fácil ver que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução local de (1) por $(t_0, x_0)$ se, e somente se, $\varphi$ é uma função contínua definida em um intervalo $I$, $t_0 \in I^o$, satisfazendo $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad t \in I. \tag{2}$$

Seja $(t_0, x_0) \in D' \subset D$, $D'$ aberto e tal que $f$ é limitada em $D'$;

isto é, $|f(t,x)| \leqslant A$, $\forall (t,x) \in D'$. Seja $d > 0$ tal que

$$R = [t_0 - d, t_0 + d] \times B_{dA}(x_0)^{-} \subset D' \quad \text{e} \quad Md < 1.$$



Se $J =: [t_0 - d, t_0 + d]$ definimos

$$\mathcal{B} := \{\psi \in C(J, \mathbb{R}^n) : \psi(t_0) = x_0 \ \text{ e } \ |\psi(t) - x_0| \leqslant dA, \ \forall t \in J\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é um subconjunto fechado de $C(J, \mathbb{R}^n)$ e portanto um subespaço métrico completo.

Seja $T : \mathcal{B} \to C(J, \mathbb{R}^n)$ definida por

$$(T\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds, \quad t \in J, \ \psi \in \mathcal{B}. \tag{3}$$

Mostremos que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ e que $T$ é uma contração. De fato:

Se $\psi \in \mathcal{B}$ então $T\psi$ é contínua, $(T\psi)(t_0) = x_0$ e

$$|(T\psi)(t) - x_0| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi(s))| dt \right| \leqslant dA, \quad \forall t \in J,$$

mostrando que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$.

Agora, para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ e $\forall t \in J$,

$$|(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))| ds \right|$$

$$\leqslant M \left| \int_{t_0}^{t} |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \right|$$

$$\leqslant Md \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty,$$

mostrando que $T$ é uma contração em $\mathcal{B}$. Segue do Princípio da Contração de Banach que $T$ tem um único ponto fixo e que (1) tem uma única solução por $(t_0, x_0)$. $\square$

# Categoria de Baire

Se $(X, \rho)$ for um espaço métrico, recorde que um conjunto $A \subset X$ será *nunca denso* se o seu fecho tem interior vazio.

A união de um número finito de conjuntos nunca densos é um conjunto nunca denso.

Contudo, a união enumerável de conjuntos nunca denso não precisa ser nunca denso.

## Definição

*Um conjunto $A \subset X$ será de Primeira Categoria em $X$ se for união enumerável de conjuntos nunca densos, caso contrário ele será de Segunda Categoria em $X$.*

É uma conseqüência imediata desta definição que

## Proposição

*$(X, \rho)$ será de segunda categoria nele mesmo se, e somente se, em qualquer representação de $X$ como união enumerável de fechados, pelo menos um deles contém uma bola aberta.*

## Teorema (Baire)

*Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.*

**Prova:** Suponha que não, isto é, que

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

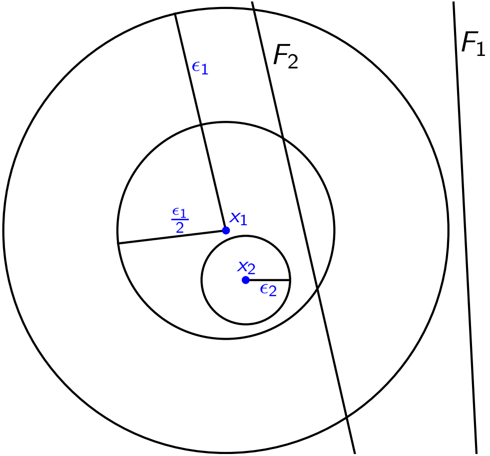
com cada $F_i$ fechado e de interior vazio.

Então $X \backslash F_1$ é não vazio e aberto. Seja $x_1$ e $0 < \epsilon_1 < 1$ tal que

$x_1 \in X \backslash F_1$ e $B_{\epsilon_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset$.

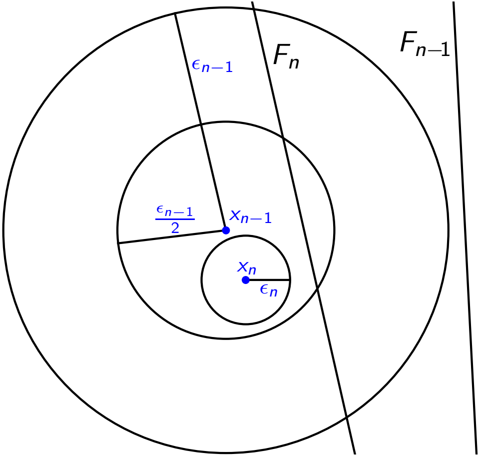
Como $B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1) \subsetneq F_2$, existe $x_2 \in B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1)$ e $\epsilon_2 < \frac{1}{2}$ tal que

$$B_{\epsilon_2}(x_2) \cap F_2 = \emptyset \text{ e } B_{\epsilon_2}(x_2) \subset B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1).$$



Indutivamente existe $x_n$, $\epsilon_n < \frac{1}{2^{n-1}}$ tais que $x_n \in B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1})$

$$B_{\epsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset \text{ e } B_{\epsilon_n}(x_n) \subset B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1}).$$



A seqüência $\{x_n\}$ é de Cauchy pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$ e $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como $X$ é completo $\{x_n\}$ é convergente. Seja $x$ o seu limite. Para cada $n$ fixo $x \in B_{\epsilon_n}(x_n)$ pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$. Logo $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ o que é uma contradição. $\square$

### Exemplo

*Todo espaço de Banach é de segunda cateoria nele mesmo.*

# Aplicações do Teorema de Baire

**Definição (Aplicação Aberta e Fechada)**

*Sejam $X, Y$ espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear.*

(1) *Diremos que $T$ será aberta se $T(U)$ for aberto em $Y$, sempre que $U$ for aberto em $X$.*

(2) *Diremos que $T$ será fechada se $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ for fechado em $X \times Y$.*

# Teorema da Aplicação Aberta

## Teorema (da Aplicação Aberta)

*Seja $X$ um espaço de Banach e $Y$ um espaço vetorial normado.*

*Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $T(X)$ for de segunda categoria em $Y$ então,*

(a) *$T$ será sobrejetora,*

(b) *$T$ será aberta e*

(c) *$Y$ será de segunda Categoria.*

## Corolário

*Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach.*

(1) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for sobrejetora então, $T$ será aberta.*

(2) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for bijetora então, $T$ será um isomorfismo.*

## Lema

*Sejam $X, Y$ espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear então, são equivalentes:*

a) *$T$ é uma aplicação aberta;*

b) *Existe $r > 0$ tal que $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$.*

**Prova:** É claro que $a \Rightarrow b$. Provaremos que $b \Rightarrow a$. Assumindo b), mostremos que, se $U \subset X$ for aberto, $Tx \in T(U)^o$, para todo $x \in U$.

De fato, dado $x \in U$, seja $s > 0$ tal que $B_s^X(x) \subset U$ e

$$T(U) \supset T(B_s^X(x)) = T(x + sB_1^X(0)) = Tx + sT(B_1^X(0))$$

$$\supset Tx + sB_r^Y(0) = Tx + B_{sr}^Y(0) = B_{sr}^Y(Tx)$$

mostrando $Tx$ é interior a $T(U)$. $\square$

## Lema

*Se $X$ for Banach, $Y$ for um espaço vetorial normado e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for tal que, para algum $r > 0$,*

$$B_r^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$$

*então,*

$$B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset T(B_1^X(0)).$$

**Prova:** Como $T$ é linear, se $\|y\| < r2^{-n}$ então, $y \in [T(B_{2^{-n}}^X(0))]^-$. Se $\|y\| < \frac{r}{2}$, seja $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X(0)$ tal que $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{4}$. Indutivamente, seja $x_n \in B_{2^{-n}}^X(0)$ tal que $\|y - \sum_{j=1}^n Tx_j\| < r2^{-n-1}$. Como $X$ é completo a série será $\sum x_n$ convergente. Se $x$ for a sua soma, $\|x\| < \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = 1$ e $y = Tx$. Logo $T(B_1^X(0)) \ni y$, se $\|y\| < \frac{r}{2}$. $\square$

**Prova (Teorema da Aplicação Aberta):**

Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^X(0)$, $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^X(0))$ é de segunda

categoria em $Y$ e $Y \ni y \to ny \in Y$ é um homeomorfismo que

leva $T(B_1^X(0))$ em $T(B_n^X(0))$.

Do Teorema de Baire $T(B_1^X(0))$ não pode ser nunca denso. Isto é,

existe $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tal que $B_{2r}^Y(y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Segue que $B_{2r}^Y(-y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$ e que $B_{2r}^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Dos Lemas anteriores $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$ e $T$ é aberta. □