Espaços Métricos
Espaços Métricos Completos: Princípio da Contração de Banach, Categoria de Baire e Aplicações
Aula 13

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

05 de Outubro de 2022

Segundo Semestre de 2022

Definição

Um espaço vetorial normado que for completo, com a métrica induzida pela norma, será chamado ***espaço de Banach****.*

Exemplo

Já sabemos que:

(1) $\mathbb{R}^n$ *com a norma* $\|\cdot\|_p$ *é um espaço de Banach.*

(2) *Se* (X, ρ) *for métrico,* $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$, *com* $\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *será Banach.*

(3) ℓ_p, *com a norma* $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *é um espaço de Banach.*

(4) $C([0,1], \mathbb{R}^n)$, *com a norma* $\|f\| = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_p$, *é Banach.*

Exemplo

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ *for um espaço vetorial normado,* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *um espaço de Banach e* $\mathcal{L}(X,Y)$ *o espaço vetorial normado das funções* $T : X \to Y$ *lineares e limitadas, isto é, com a norma*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

então $\mathcal{L}(X,Y)$ *será um espaço de Banach.*

Contrações e Aplicações

Definição

Seja (X, ρ) um espaço métrico completo.

Uma aplicação $T : X \to X$ será chamada uma contração em X se existir $0 < \kappa < 1$, tal que

$$\rho(Tx, Ty) \leqslant \kappa\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Teorema (Princípio da Contração de Banach)

Se X for um espaço métrico completo e T uma contração em X então, T terá um único **ponto fixo** *em X, isto é, existirá um único $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = x_0$.*

Prova: Vamos primeiramente provar que T tem no máximo um ponto fixo. Se x e y são pontos fixos de T, temos que

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leqslant \kappa\rho(x, y)$$

e portanto $x = y$.

Agora mostramos a existência. Seja $x \in X$ e considere a *órbita*,

$$\{x, Tx, T^2x, \cdots\}, \quad \text{de } x.$$

Mostremos que $\{T^n x\}$ é uma seqüência de Cauchy. De fato:

$$\begin{aligned}
\rho(T^{n+p}x, T^n x) &\leqslant \kappa\rho(T^{n+p-1}x, T^{n-1}x) \leqslant \cdots \leqslant \kappa^n \rho(T^p x, x) \\
&\leqslant \kappa^n[\rho(T^p x, T^{p-1}x) + \cdots + \rho(Tx, x)] \\
&\leqslant \kappa^n[\kappa^{p-1}\rho(Tx, x) + \cdots + \rho(Tx, x)] \\
&\leqslant \kappa^n[\kappa^{p-1} + \cdots + 1]\rho(Tx, x) \\
&\leqslant \tfrac{\kappa^n}{1-\kappa}\rho(Tx, x).
\end{aligned}$$

Como $\kappa < 1$ temos que $\{T^n x\}$ é uma seqüência de Cauchy e portanto convergente para algum $x_0 \in X$. Mostremos que x_0 é um ponto fixo de T. De fato:

$$Tx_0 = T \lim_{n\to\infty} T^n x = \lim_{n\to\infty} T^{n+1} x = x_0. \quad \square$$

Corolário

Seja (X,ρ) um espaço métrico completo. Se $T\colon X\to X$ e T^{n_0} for uma contração, para algum $n_0\in\mathbb{N}$ então, T terá um único ponto fixo.

Prova: Do Princípio da Contração de Banach, T^{n_0} tem um único ponto fixo x^* em X. Como $T^{n_0}(Tx^*) = T(T^{n_0}x^*) = Tx^*$ e Tx^* também será um ponto fixo de T^{n_0}. Logo $Tx^* = x^*$. $\square$

Aplicação - Teorema de Picard

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto conexo e $f : D \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_i) \in D, \; i = 1, 2.$$

Suponha ainda que f seja contínua.

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Definição

Se $(t_0, x_0) \in D$, *uma solução local de* (1) *passando por* x_0 *no instante* t_0 *é uma função* $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ *que satisfaz:*

(a) $t_0 \in I^o$ *e* $\varphi(t_0) = x_0$,

(b) $(t, \varphi(t)) \in D$, *para todo* $t \in I$,

(c) ϕ *é contínuamente diferenciável e*

(d) $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \forall t \in I$.

Teorema (Picard)

Se f é como acima, para cada $(t_0, x_0) \in D$, a equação diferencial (1) possui uma única solução local por (t_0, x_0).

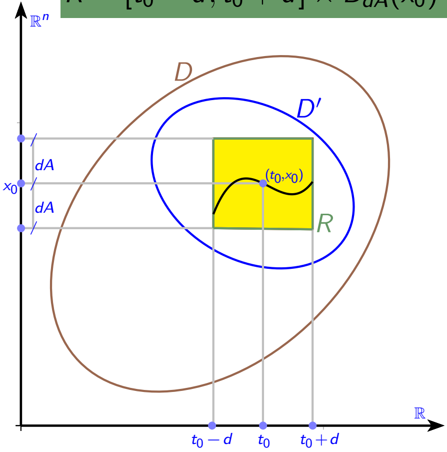
Prova: É fácil ver que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução local de (1) por (t_0, x_0) se, e somente se, φ é uma função contínua definida em um intervalo I, $t_0 \in I^o$, satisfazendo $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad t \in I. \tag{2}$$

Seja $(t_0, x_0) \in D' \subset D$, D' aberto e tal que f é limitada em D';

isto é, $|f(t,x)| \leqslant A$, $\forall (t,x) \in D'$. Seja $d > 0$ tal que

$R = [t_0 - d, t_0 + d] \times B_{dA}(x_0)^- \subset D'$ e $Md < 1$.



Se $J =: [t_0 - d, t_0 + d]$ definimos

$$\mathcal{B} := \{\psi \in C(J, \mathbb{R}^n) : \psi(t_0) = x_0 \ \text{ e } \ |\psi(t) - x_0| \leqslant dA, \ \forall t \in J\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é um subconjunto fechado de $C(J, \mathbb{R}^n)$ e portanto um subespaço métrico completo.

Seja $T : \mathcal{B} \to C(J, \mathbb{R}^n)$ definida por

$$(T\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds, \quad t \in J, \ \psi \in \mathcal{B}. \tag{3}$$

Mostremos que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ e que T é uma contração. De fato:

Se $\psi \in \mathcal{B}$ então $T\psi$ é contínua, $(T\psi)(t_0) = x_0$ e

$$|(T\psi)(t) - x_0| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi(s))| dt \right| \leqslant dA, \quad \forall t \in J,$$

mostrando que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$.

Agora, para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ e $\forall t \in J$,

$$|(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))| ds \right|$$

$$\leqslant M \left| \int_{t_0}^{t} |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \right|$$

$$\leqslant Md \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty,$$

mostrando que T é uma contração em $\mathcal{B}$. Segue do Princípio da Contração de Banach que T tem um único ponto fixo e que (1) tem uma única solução por (t_0, x_0). $\square$

Categoria de Baire

Se (X, ρ) for um espaço métrico, recorde que um conjunto $A \subset X$ será *nunca denso* se o seu fecho tem interior vazio.

A união de um número finito de conjuntos nunca densos é um conjunto nunca denso.

Contudo, a união enumerável de conjuntos nunca denso não precisa ser nunca denso.

Definição

Um conjunto $A \subset X$ será de Primeira Categoria em X se for união enumerável de conjuntos nunca densos, caso contrário ele será de Segunda Categoria em X.

É uma conseqüência imediata desta definição que

Proposição

(X, ρ) será de segunda categoria nele mesmo se, e somente se, em qualquer representação de X como união enumerável de fechados, pelo menos um deles contém uma bola aberta.

Teorema (Baire)

Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.

Prova: Suponha que não, isto é, que

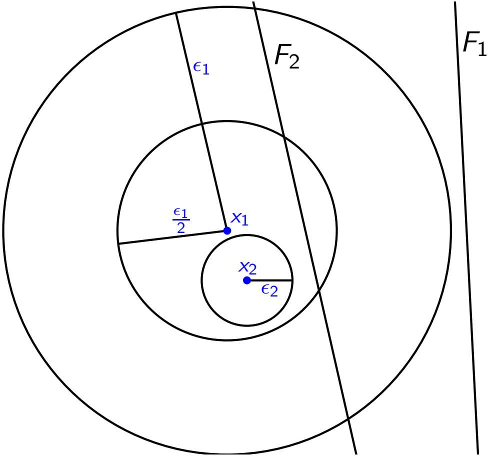
$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

com cada F_i fechado e de interior vazio.

Então $X \backslash F_1$ é não vazio e aberto. Seja x_1 e $0 < \epsilon_1 < 1$ tal que $x_1 \in X \backslash F_1$ e $B_{\epsilon_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset$.

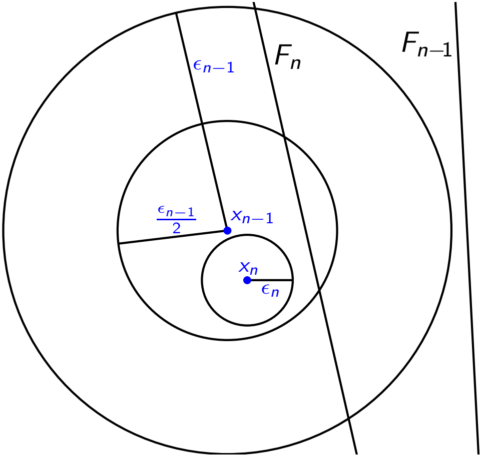
Como $B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1) \subsetneq F_2$, existe $x_2 \in B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1)$ e $\epsilon_2 < \frac{1}{2}$ tal que

$B_{\epsilon_2}(x_2) \cap F_2 = \emptyset$ e $B_{\epsilon_2}(x_2) \subset B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1)$.



Indutivamente existe x_n, $\epsilon_n < \frac{1}{2^{n-1}}$ tais que $x_n \in B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1})$

$$B_{\epsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset \text{ e } B_{\epsilon_n}(x_n) \subset B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1}).$$



A seqüência $\{x_n\}$ é de Cauchy pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$ e $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como X é completo $\{x_n\}$ é convergente. Seja x o seu limite. Para cada n fixo $x \in B_{\epsilon_n}(x_n)$ pois $x_{n+k} \in B_{\frac{\epsilon_n}{2}}(x_n)$ para $k = 1, 2, \ldots$. Logo $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ o que é uma contradição. □

Exemplo

Todo espaço de Banach é de segunda cateoria nele mesmo.

Aplicações do Teorema de Baire

Definição (Aplicação Aberta e Fechada)

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear.

(1) *Diremos que T será aberta se $T(U)$ for aberto em Y, sempre que U for aberto em X.*

(2) *Diremos que T será fechada se $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ for fechado em $X \times Y$.*

Teorema da Aplicação Aberta

Teorema (da Aplicação Aberta)

Seja X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado.

Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $T(X)$ for de segunda categoria em Y então,

(a) *T será sobrejetora,*

(b) *T será aberta e*

(c) *Y será de segunda Categoria.*

Corolário

Sejam X e Y espaços de Banach.

(1) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for sobrejetora então, T será aberta.*

(2) *Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for bijetora então, T será um isomorfismo.*

Lema

Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear então, são equivalentes:

a) *T é uma aplicação aberta;*

b) *Existe $r > 0$ tal que $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$.*

Prova: É claro que $a \Rightarrow b$. Provaremos que $b \Rightarrow a$. Assumindo b), mostremos que, se $U \subset X$ for aberto, $Tx \in T(U)^o$, para todo $x \in U$.

De fato, dado $x \in U$, seja $s > 0$ tal que $B_s^X(x) \subset U$ e

$$T(U) \supset T(B_s^X(x)) = T(x + sB_1^X(0)) = Tx + sT(B_1^X(0))$$
$$\supset Tx + sB_r^Y(0) = Tx + B_{sr}^Y(0) = B_{sr}^Y(Tx)$$

mostrando Tx é interior a $T(U)$. $\square$

Lema

Se X for Banach, Y for um espaço vetorial normado e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ for tal que, para algum $r > 0$,

$$B_r^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$$

então,

$$B_{\frac{r}{2}}^Y(0) \subset T(B_1^X(0)).$$

Prova: Como T é linear, se $\|y\| < r2^{-n}$ então, $y \in [T(B_{2^{-n}}^X(0))]^-$. Se $\|y\| < \frac{r}{2}$, seja $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X(0)$ tal que $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{4}$. Indutivamente, seja $x_n \in B_{2^{-n}}^X(0)$ tal que $\|y - \sum_{j=1}^n Tx_j\| < r2^{-n-1}$. Como X é completo a série será $\sum x_n$ convergente. Se x for a sua soma, $\|x\| < \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = 1$ e $y = Tx$. Logo $T(B_1^X(0)) \ni y$, se $\|y\| < \frac{r}{2}$. $\square$

Prova (Teorema da Aplicação Aberta):

Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^X(0)$, $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^X(0))$ é de segunda

categoria em Y e $Y \ni y \to ny \in Y$ é um homeomorfismo que

leva $T(B_1^X(0))$ em $T(B_n^X(0))$.

Do Teorema de Baire $T(B_1^X(0))$ não pode ser nunca denso. Isto é,

existe $y_0 \in Y$ e $r > 0$ tal que $B_{2r}^Y(y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Segue que $B_{2r}^Y(-y_0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$ e que $B_{2r}^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$.

Dos Lemas anteriores $B_r^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$ e T é aberta. $\square$