# Espaços Métricos
# Espaços Métricos Completos: Contrações e Aplicações
# Aula 12

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

03 de Outubro de 2022

**Segundo Semestre de 2022**

## Definição

*Um espaço vetorial normado que for completo, com a métrica induzida pela norma, será chamado* **espaço de Banach**.

## Exemplo

*Já sabemos que:*

(1) $\mathbb{R}^n$ *com a norma* $\|\cdot\|_p$ *é um espaço de Banach.*

(2) *Se* $(X,\rho)$ *for métrico,* $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}^n)$, *com* $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *será Banach.*

(3) $\ell_p$, *com a norma* $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *é um espaço de Banach.*

(4) $C([0,1],\mathbb{R}^n)$, *com a norma* $\|f\| = \sup\limits_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_p$, *é Banach.*

## Exercício

*Se $(Z,\sigma)$ for um espaço métrico e $Y$ um espaço de Banach então, $\mathcal{B}(Z,Y)$, com a norma $\|T\| = \sup\limits_{z\in Z}\|T(z)\|_Y$, será Banach.*

## Exemplo

*Se $(X,\|\cdot\|_X)$ for um espaço vetorial normado, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço vetorial normado das funções $T : X \to Y$ lineares e limitadas, isto é, com a norma*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

*então $\mathcal{L}(X,Y)$ será um espaço de Banach.*

**Solução:** Primeiramente considere o espaço métrico $Z := \bar{B}_1^X(0)$ e o espaço vetorial $\mathcal{B}(Z,Y)$, com a norma $\|T\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in Z}\|Tz\|_Y$.

É claro que $\mathcal{L}(X,Y) \ni T \stackrel{\Phi}{\longmapsto} T|_Z \in \mathcal{B}(Z,Y)$ é uma isometria.

Já vimos que $\mathcal{B}(Z,Y)$ é completo. Basta mostrar que $\Phi(\mathcal{L}(X,Y))$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{B}(Z,Y)$.

Seja $\tilde{T} \in \Phi(\mathcal{L}(X,Y))^-$ e $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\Phi(T_n) = T_n|_Z \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{T}$.

Defina $Tx = \|x\|\,\tilde{T}(\|x\|^{-1}x)$, $\|x\| \neq 0$, $T0 = 0$. Note que,

$$\begin{aligned} T_n x = \|x\|\, T_n(\|x\|^{-1}x) &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|\,\tilde{T}(\|x\|^{-1}x) = Tx, \quad 0 \neq x \in X \\ &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{T}x, \quad 0 \neq x \in X,\ \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Mostrando que $T$ estende $\tilde{T}$ e $T_n x \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$, para todo $x \in X$.

Agora, se $x, x' \in X$ e $\alpha, \beta$ são escalares,

$$\|T(\alpha x+\beta x')-\alpha Tx-\beta Tx'\|$$

$$\uparrow_{n\to\infty}$$

$$\|T_n(\alpha x+\beta x')-\alpha Tx-\beta Tx'\| = \|\alpha(T_n x - Tx) + \beta(T_n x' - Tx')\|$$

$$\downarrow_{n\to\infty}$$

$$0$$

É fácil ver que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T_n \xrightarrow{n\to\infty} T$ em $\mathcal{L}(X, Y)$ e $T|_Z = \tilde{T}$,

mostrando que $\Phi(\mathcal{L}(X, Y))$ é fechado em $\mathcal{B}(Z, Y)$.

Segue que $\mathcal{L}(X, Y)$ é Banach. $\square$

## Exercício

*Seja $X$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mostre que o espaço $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, chamado de dual de $X$, é Banach.*

## Exercício

*Sejam $X, Y$ um espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mostre que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se, e somente se, $T : X \to Y$ é linear e contínua se, e somente se, $T : X \to Y$ é linear e contínua em $x = 0$.*