Espaços Métricos
Espaços Métricos Completos: Contrações e Aplicações
Aula 12

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

03 de Outubro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Definição

Um espaço vetorial normado que for completo, com a métrica induzida pela norma, será chamado ***espaço de Banach****.*

Exemplo

Já sabemos que:

(1) $\mathbb{R}^n$ *com a norma* $\|\cdot\|_p$ *é um espaço de Banach.*

(2) *Se* (X,ρ) *for métrico,* $\mathcal{B}(X,\mathbb{R}^n)$, *com* $\|f\| = \sup\limits_{x\in X}\|f(x)\|_p$,

$1 \leqslant p \leqslant \infty$, *será Banach.*

(3) ℓ_p, *com a norma* $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *é um espaço de Banach.*

(4) $C([0,1],\mathbb{R}^n)$, *com a norma* $\|f\| = \sup\limits_{t\in[a,b]}\|f(t)\|_p$, *é Banach.*

Exercício

Se (Z, σ) for um espaço métrico e Y um espaço de Banach então, $\mathcal{B}(Z, Y)$, com a norma $\|T\| = \sup_{z \in Z} \|T(z)\|_Y$, será Banach.

Exemplo

Se $(X, \|\cdot\|_X)$ for um espaço vetorial normado, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial normado das funções $T : X \to Y$ lineares e limitadas, isto é, com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < \infty,$$

então $\mathcal{L}(X, Y)$ será um espaço de Banach.

Solução: Primeiramente considere o espaço métrico $Z := \bar{B}_1^X(0)$ e o espaço vetorial $\mathcal{B}(Z,Y)$, com a norma $\|T\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in Z}\|Tz\|_Y$.

É claro que $\mathcal{L}(X,Y) \ni T \overset{\Phi}{\longmapsto} T|_Z \in \mathcal{B}(Z,Y)$ é uma isometria.

Já vimos que $\mathcal{B}(Z,Y)$ é completo. Basta mostrar que $\Phi(\mathcal{L}(X,Y))$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{B}(Z,Y)$.

Seja $\tilde{T} \in \Phi(\mathcal{L}(X,Y))^-$ e $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\Phi(T_n) = T_n|_Z \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{T}$.

Defina $Tx = \|x\|\,\tilde{T}(\|x\|^{-1}x)$, $\|x\| \neq 0$, $T0 = 0$. Note que,

$$\begin{aligned} T_n x = \|x\|\,T_n(\|x\|^{-1}x) &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|\,\tilde{T}(\|x\|^{-1}x) = Tx, \quad 0 \neq x \in X \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{T}x, \quad 0 \neq x \in X,\ \|x\| \leq 1 \end{aligned}$$

Mostrando que T estende $\tilde{T}$ e $T_n x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$, para todo $x \in X$.

Agora, se $x, x' \in X$ e α, β são escalares,

$$\|T(\alpha x + \beta x') - \alpha Tx - \beta Tx'\|$$

$$\uparrow_{n\to\infty}$$

$$\|T_n(\alpha x + \beta x') - \alpha Tx - \beta Tx'\| = \|\alpha(T_n x - Tx) + \beta(T_n x' - Tx')\|$$

$$\downarrow_{n\to\infty}$$

$$0$$

É fácil ver que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$ em $\mathcal{L}(X, Y)$ e $T|_Z = \tilde{T}$,

mostrando que $\Phi(\mathcal{L}(X, Y))$ é fechado em $\mathcal{B}(Z, Y)$.

Segue que $\mathcal{L}(X, Y)$ é Banach. $\square$

Exercício

Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mostre que o espaço $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, chamado de dual de X, é Banach.

Exercício

Sejam X, Y um espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mostre que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ se, e somente se, $T : X \to Y$ é linear e contínua se, e somente se, $T : X \to Y$ é linear e contínua em $x = 0$.