Espaços Métricos
Exemplos de Espaços Métricos Completos e Completamento
Aula 11

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

28 de Setembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Definição (Recordação)

Seja (X, ρ) um espaço métrico e $E \subset X$.

E será **completo** *se, e somente se, toda seqüência de Cauchy*

de elementos de E for convergente em E.

Exemplo (Revisitado)

$\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (\text{ou } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) : \|x\|_p < \infty \right\}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *é completo.*

Recorde que se $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (\text{ou } \mathbb{C}^{\mathbb{N}})$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \; 1 \leqslant p < \infty \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

De fato: Para $1 \leqslant p < \infty$, mostraremos que ℓ_p é completo.

O caso $p = \infty$ será deixado como exercício.

Se $\{x^n\}$ é uma seqüência de Cauchy em ℓ_p, dado $\epsilon > 0$ existe

$N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^n - x^m\|_p < \epsilon$, $\forall\ m, n \geqslant N$, isto é, para $k \geq j$,

$$|x_j^n - x_j^m|^p \leqslant \sum_{i=1}^{k} |x_i^n - x_i^m|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m|^p < \epsilon^p, \quad \forall m, n \geqslant N.$$

Daí, $\{x_j^n\}_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e portanto convergente.

Se $x_j := \lim\limits_{m\to\infty} x_j^m$, $x = \{x_j\}$ é o candidato a limite de $\{x^n\}$. Note que:

$$|x_j^n - x_j|^p \leqslant \sum_{i=1}^{k} |x_i^n - x_i|^p \leqslant \epsilon^p, \quad \forall n \geqslant N.$$

Mostremos que $x \in \ell_p$ e que $x^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Se $n \geqslant N$ e $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \epsilon + \|x^n\|_p.$$

Isto nos permite concluir que $x = \{x_i\} \in \ell_p$.

Além disso, como para cada $k \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant N$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \epsilon$$

temos que $\|x^n - x\|_p \leqslant \epsilon$ para todo $n \geqslant N$. Logo $x^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ em ℓ_p.

Exercício

Sejam (X_i, ρ_i), $1 \leq i \leq N$, espaços métricos e $\Pi = \prod_{i=1}^{N} X_i$, (Π, π_p) o expaço produto. Mostre que (Π, π_p) será completo se, e somente se, cada (X_i, ρ_i), $1 \leq i \leq N$, for completo.

Proposição

Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo e um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.

Prova:

Se (X, ρ) for um espaço métrico completo, $E \subset X$ for fechado e $\{x_n\}$ for de Cauchy em E, $\{x_n\}$ convergirá para algum $x \in X$. Logo $x \in E^- = E$ e E será completo.

Se, no espaço métrico (X, ρ), E for completo e $x \in E^-$, existirá uma seqüência $\{x_n\}$ em E convergente (portanto de Cauchy) e com limite x. Como E é completo, $x \in E$ e E será fechado. $\square$

Exemplo

$X = [0, 1]$ *com a métrica usual é completo.*

Exemplo

Se (X,ρ) for um espaço métrico, o espaço vetorial normado

$\mathcal{B}(X,\mathbb{R})=\{f:X\to\mathbb{R}:\sup_{x\in X}|f(x)|<\infty\}$, *com norma* $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$,

será completo.

De fato: Se $\{f_n\}$ for uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, para cada $x\in X$,

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|\overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Logo $\{f_n(x)\}$ será convergente em $\mathbb{R}$.

Defina, para cada $x\in X$, $f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$.

Mostremos que $f\in\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ e que $\{f_n\}$ converge para f.

Como $\{f_n\}$ é de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existirá $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n, m \geqslant N, \ x \in X.$$

Sendo assim, fazendo $m \to \infty$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}, \ \forall n \geqslant N, \ x \in X. \tag{1}$$

Como toda seqüência de Cauchy é limitada. Existe $M > 0$ tal que $\|f_m\| \leqslant M$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Disto e de (1) deduzimos que

$$|f(x)| \leqslant |f_m(x)| + \frac{\epsilon}{2} < M + \epsilon, \ \forall m \geqslant N, \ x \in X.$$

Logo $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ e (1) mostra que $\{f_n\}$ é convergente para f.

Completamento

Recorde que,

Definição (Aula 04)

Sejam (X,ρ), (Y,σ) espaços métricos.

Se $T : X \to Y$ for tal que $\sigma(T(x_1), T(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in X$, f será chamada uma imersão isométrica de X em Y. Neste caso diremos que (X,ρ) pode ser imerso isometricamente em (Y,σ).

Uma imersão isométrica sobrejetora $T : X \to Y$ será chamada de isometria. Neste caso diremos que os espaços métricos (X,ρ) e (Y,σ) serão isométricos.

Seja (X,ρ) um espaço métrico qualquer. Contruiremos um espaço métrico completo $(\tilde{X},\tilde{\rho})$, a partir de (X,ρ), de modo que (X,ρ) seja isométrico a um subconjunto denso de $(\tilde{X},\tilde{\rho})$.

Exemplo (Aula 04)

Um espaço métrico (X,ρ) pode ser imerso isometricamente no espaço vetorial normado $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$, *com a norma* $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

Solução: Fixe $x_0 \in X$ e tome $T : X \to \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ dada por:

$$(Tx)(x') = \rho(x, x') - \rho(x_0, x'), \quad \text{para todo } x' \in X.$$

Como, $(Tx)(x_0) = \rho(x, x_0)$, $|(Tx_1)(x_2) - (Tx_2)(x_2)| = \rho(x_1, x_2)$ e para todo $x' \in X$

$$|(Tx)(x')| = |\rho(x, x') - \rho(x_0, x')| \leqslant \rho(x, x_0),$$

$$|(Tx_1)(x') - (Tx_2)(x')| = |\rho(x_1, x') - \rho(x_2, x')| \leqslant \rho(x_1, x_2)$$

segue que $\|Tx\|_\infty = \rho(x, x_0)$ e $\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty = \rho(x_1, x_2)$. $\square$

Teorema (Completamento e sua 'unicidade')

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então,

(1) *(X, ρ) será isométrico a um subconjunto denso de um espaço métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$,*

(2) *se (X, ρ) for isométrico a subconjuntos densos de espaços completos $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ e $(\check{X}, \check{\rho})$, $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ e $(\check{X}, \check{\rho})$ serão isométricos.*

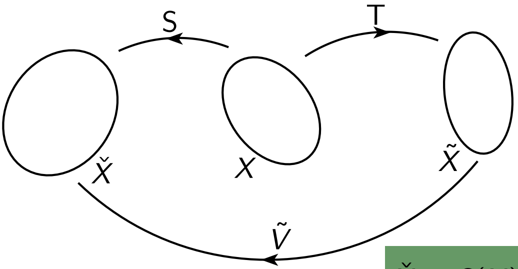
Prova: (1) Vimos que $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ é completo e que existe uma imersão isométrica de $T : X \to \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$.

Se $\tilde{X} = T(X)^{-}$, X é isométrico a $T(X)$ que é denso em $\tilde{X}$.

Como $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ é completo e $\tilde{X} \subset \mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ é fechado, $\tilde{X}$ é um espaço métrico completo.

(2) Mostremos que $\tilde{X}$ é único a menos de isometria. Se existem $\tilde{X}$, $\check{X}$ espaços métricos completos e isometrias $T : X \to \tilde{X}$, $S : X \to \check{X}$ com imagens densas, definimos a isometria $\tilde{V} : \tilde{X} \to \check{X}$ como a única extensão contínua a $\tilde{X}$ da isometria

$$V = S \circ T^{-1} : T(X) \to S(X).$$



$$\check{X} \supset S(X) \xleftarrow{S} X \xrightarrow{T} T(X) \subset \tilde{X}$$

$S \circ T^{-1} : T(X) \to S(X)$ é uma isometria

Se $\tilde{x} \in \tilde{X}$, existe seqüência $\tilde{x}_n = T(x_n) \in T(X)$ tal que $\tilde{x}_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{x}$. Claramente $S \circ T^{-1}(\tilde{x}_n) = S(x_n) = \check{x}_n$ é de Cauchy em $\check{X}$ e portanto convergente para algum $\check{x}$, isto é, $\check{x}_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \check{x}$. Definimos $\tilde{V}(\tilde{x}) = \check{x}$. Assim, $\tilde{V}$ estende $S \circ T^{-1}$ e é uma isometria. $\square$