Espaços Métricos
Espaços Métricos Completos
Aula 10

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

26 de Setembro de 2022

Segundo Semestre de 2022

Definição

Seja (X,ρ) um espaço métrico. $\{x_n\}\in X^{\mathbb{N}}$ será chamada uma **seqüência de Cauchy** *se, e somente se, dado $\epsilon>0$, existir $N\in\mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n,x_m)<\epsilon$, para todo $n,m\geqslant\epsilon$, ou seja, se, e somente se,*

$$\rho(x_n,x_m)\overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Observação

(1) *Toda subseqüência de uma seqüência de Cauchy é de Cauchy.*

(2) *Toda uma seqüência convergente é de Cauchy.*

(3)

Pode ocorrer que uma seqüência de Cauchy não seja convergente.

(4) *Toda uma seqüência de Cauchy é limitada.*

(5) *Nem toda uma seqüência limitada é de Cauchy.*

(6) *Uma seqüência de Cauchy que possui uma subseqüência convergente é convergente.*

Definição

Seja (X, ρ) um espaço métrico e $E \subset X$.

E será **completo** *se, e somente se, toda seqüência de Cauchy de elementos de E for convergente em E.*

Exemplo

$\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo (usando o axioma do sup).

De fato: Seja $\{x_n\}$ de Cauchy em $\mathbb{R}$ e $X_n = \{x_j : j \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

É claro que $X_n \supset X_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Seja $a_n = \inf X_n$, $n \in \mathbb{N}$. É claro que $\{a_n\}$ é crescente e limitada em $\mathbb{R}$. Então $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Mostremos que $\{x_n\}$ tem uma subseqüência convergente para a.

De fato, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que, $a - \frac{1}{k} < a_n < a + \frac{1}{k}$, $\forall\ n \geqslant n_k$. Como $a_{n_k} = \inf X_{n_k}$, existe $x_{n_k} \in X_{n_k}$ tal que $a - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leqslant x_{n_k} < a + \frac{1}{k}$ (podemos tomar $n_k < n_{k+1}$) e o resultado está provado. □

Exemplo

(1) (X, ρ) *com* $X \neq \varnothing$ *e* ρ *é a métrica discreta em* X *é completo.*

(2) *Em* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $\mathbb{R}^n$ *é completo enquanto que* $\mathbb{Q}^n$ *não é.*

(3) $X = (0, 1)$ *com a métrica usual não é completo.*

(4) $C([a, b], \mathbb{R})$ *com a norma* $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ *é completo.*

(5) ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *é um espaço métrico completo.*

De fato:

(1) Na métrica discreta, seqüências de Cauchy são eventualmente constantes e portanto convergentes.

(2) Segue da mesma forma que (5) (exercício).

(3) Note que $\{\frac{1}{n+1}\}$ é de Cauchy mas não é convergente em X.

(4) Seja f_n uma seqüência de Cauchy em $C([a,b],\mathbb{R})$. Segue que, para cada $x \in [a,b]$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo $\{f_n(x)\}$ é convergente em $\mathbb{R}$. Defina, para cada $x \in [a,b]$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Mostremos que $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ e que $\{f_n\}$ converge para f.

É claro que, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in [a, b]$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n, m \geqslant N,\ x \in [a, b].$$

Logo, fazendo $n \to \infty$,

$$|f(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{3},\ \forall m \geqslant N,\ x \in [a, b]. \tag{1}$$

Se $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, isto mostra que $\{f_n\}$ é convergente.

Para concluir a prova, mostremos que f é contínua.

Dado $y \in [a, b]$, $\epsilon > 0$, fixe $m \in \mathbb{N}$ tal que a (1) esteja satisfeita e escolha $\delta > 0$ tal que, $x \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f_m(x) - f_m(y)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Logo, $x \in [a, b]$, $|x - y| < \delta \Rightarrow$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)| < \epsilon.$$

Isto mostra que f é contínua em y. Como y é arbitrário, segue que $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ e que $C([a, b], \mathbb{R})$ é completo.

(5) Mostraremos apenas que ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, é completo. A prova do caso remanescente será deixada como exercício.

Se $\{x^n\}$ é uma seqüência de Cauchy em ℓ_p, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m|^p < \epsilon^p, \quad \forall m, n > N.$$

Segue que $\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e portanto convergente.

Seja $x_i := \lim_{n\to\infty} x_i^n$. A seqüência $x = \{x_i\}$ é o candidato a limite da seqüência $\{x^n\}$.

Mostremos que isto de fato ocorre. Se $n > N$ e $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \epsilon + \|x^n\|_p.$$

Isto nos permite concluir que $x = \{x_i\} \in \ell_p$.

Além disso, como para cada $k \in \mathbb{N}$ e $n > N$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \epsilon$$

temos que $\|x^n - x\|_p \leqslant \epsilon$ para todo $n > N$. Logo $x^n \xrightarrow{n\to\infty} x$ em ℓ_p.