Espaços Métricos
Espaços Conexos por Caminhos
Aula 09

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

21 de Setembro de 2022

Segundo Semestre de 2022

Todo conexo na reta é um intervalo

Exemplo

Todo conexo na reta é um intervalo.

Basta ver que, se X é conexo em $\mathbb{R}$, $a,b \in X$ e $a < c < b$, então $c \in X$.
De fato, se $c \notin X$, $(-\infty, c) \cap X$ e $(c, \infty) \cap X$ são abertos disjuntos, não vazios e sua união é X.

Exercício

Mostre o teorema do valor intermediário.

União de conexos com um elemento em comum é conexa

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Se $\{A_i : i \in I\}$ for uma família de conjuntos conexos e $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$,

então $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ será conexo.

Prova:

Sejam $U, V \subset A$ abertos em A com $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = A$ e

$$a \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap U.$$

Note que $A_i = (U \cap A_i) \cup (V \cap A_i)$, $(U \cap A_i) \cap (V \cap A_i) = \varnothing$, $U \cap A_i$, $V \cap A_i$ são abertos em A_i e $a \in (U \cap A_i)$ para todo $i \in I$.

Como A_i é conexo, $V \cap A_i = \varnothing$, para todo $i \in I$ e $V = \varnothing$. $\square$

Esta proposição nos dá o seguinte resultado de caracterização de conexos.

Corolário

Um espaço métrico (X, ρ) será conexo se, e somente se, quaisquer dois pontos de X estiverem contidos em algum subconjunto conexo.

Prova: Se (X, ρ) é conexo o resultado é óbvio. Para a recíproca, fixe $x_1 \in X$ e seja C_x um conexo que contém $\{x_1, x\}$. Do resultado anterior $X = \cup_{x \in X} C_x$ é conexo.

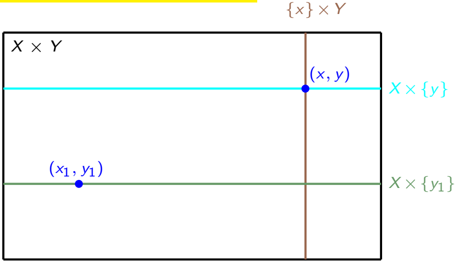
Produto de conexos é conexo

A proposição seguir também segue da proposição anterior.

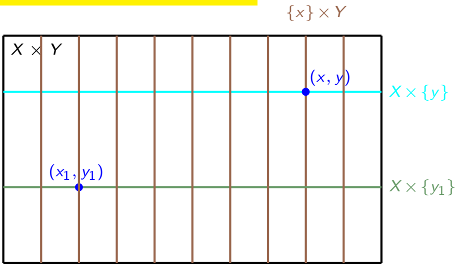
Proposição

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos, $\Pi = X \times Y$ e (Π, π_p) o espaço produto. Então, Π será conexo se, e somente se, X e Y forem conexos.

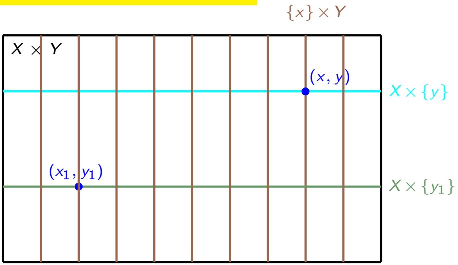
Prova: Como as projeções são funções contínuas segue que, se Π é conexo, então X e Y são conexos.



Prova: Como as projeções são funções contínuas segue que, se Π é conexo, então X e Y são conexos.



Prova: Como as projeções são funções contínuas segue que, se Π é conexo, então X e Y são conexos.



Por outro lado, se X e Y são conexos os conjuntos $X \times \{y\}$ e $\{x\} \times Y$ e $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ são conexos $\forall (x, y) \in \Pi$. Logo, fixado $(x_1, y_1) \in \Pi$, $\Pi = \bigcup_{x \in X} \{(X \times \{y_1\}) \cup (\{x\} \times Y)\}$ é conexo. $\square$

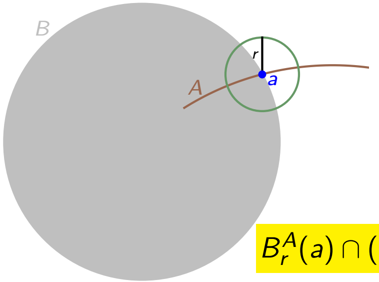
Teorema da Alfândega

Proposição (Teorema da Alfândega)

Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico (X, ρ).

Se A é conexo, $A \cap B \neq \varnothing$ e $A \cap B^c \neq \varnothing$, então $A \cap \partial B \neq \varnothing$.

Prova: Note que $A \cap B \neq \varnothing$ e $A \cap B^c \neq \varnothing$. Assim $A \cap B$ não é vazio nem todo A. Logo a fronteira de $A \cap B$ em A contém um ponto $\{a\}$, ou seja, para qualquer $r > 0$,



$$B_r^A(a) \cap (A \cap B) \neq \varnothing \Rightarrow B_r^X(a) \cap B \neq \varnothing$$ e

$$B_r^A(a) \cap \underbrace{(A \backslash (A \cap B))}_{A \cap B^c} \neq \varnothing \Rightarrow B_r^X(a) \cap B^c \neq \varnothing.$$

Desta forma, $a \in \partial B$ e o resultado está provado. $\square$

Espaços Conexos por Caminhos

Definição (Conexo por caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Diremos que (X, ρ) será conexo por caminhos se, e somente se, dados dois pontos $a, b \in X$ existir um caminho que liga 'a' a 'b'.*
- *Seja $E \subset X$ e ρ_E a métrica induzida em E por ρ. Diremos que E será conexo por caminhos se, e somente se, (E, ρ_E) for conexo por caminhos.*

Espaços Conexos por Caminhos

Definição (Conexo por caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Diremos que (X, ρ) será conexo por caminhos se, e somente se, dados dois pontos $a, b \in X$ existir um caminho que liga 'a' a 'b'.*
- *Seja $E \subset X$ e ρ_E a métrica induzida em E por ρ. Diremos que E será conexo por caminhos se, e somente se, (E, ρ_E) for conexo por caminhos.*

Proposição

Todo espaço métrico (X, ρ) conexo por caminhos é conexo.

Prova: Note que, se $a, b \in X$, existe um caminho γ que liga 'a' a 'b'.

Logo $\gamma([a, b])$ é um conexo que contém a, b.

A conexidade de (X, ρ) agora segue de um resultado anterior. $\square$

Proposição

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos.

Se (X, ρ) for conexo por caminhos e existir uma função contínua e sobrejetora $f : X \to Y$, então (Y, σ) será conexo por caminhos.

Prova: Como f é sobrejetora, se $\alpha, \beta \in Y$ existem $a, b \in X$ tais que $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$.

Como X é conexo por caminhos, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \to X$ que liga 'a' a 'b'.

Desta forma, $f \circ \gamma : [0, 1] \to Y$ é um caminho que liga α a β e Y é conexo por caminhos. □

Proposição

Sejam (X,ρ) e (Y,σ) espaços métricos.

Se (X,ρ) for conexo por caminhos e existir uma função contínua e sobrejetora $f : X \to Y$, então (Y,σ) será conexo por caminhos.

Prova: Como f é sobrejetora, se $\alpha, \beta \in Y$ existem $a, b \in X$ tais que $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$.

Como X é conexo por caminhos, existe um caminho $\gamma : [0,1] \to X$ que liga 'a' a 'b'.

Desta forma, $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ é um caminho que liga α a β e Y é conexo por caminhos. $\square$

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Se $\{A_i : i \in I\}$ for uma família de conexos por caminhos de X

e $\cap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, então $\cup_{i\in I} A_i$ será conexo por caminhos.

Prova: Se $a, b \in A = \cup_{i\in I} A_i$ e $c \in \cap_{i\in I} A_i$, $a \in A_j$ e $b \in A_k$, $j, k \in I$.

Como cada A_i é conexo por caminhos, $i \in I$, existem caminhos

$\gamma_a : [0,1] \to A_j$, que liga 'a' a 'c', e $\gamma_b : [0,1] \to A_k$, que liga 'c' a 'b'.

Logo $\gamma_a \vee \gamma_b$ é um caminho em A que liga 'a' a 'b'. □

Proposição

Seja (X,ρ) um espaço métrico.

Se $\{A_i : i \in I\}$ for uma família de conexos por caminhos de X e $\cap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, então $\cup_{i\in I} A_i$ será conexo por caminhos.

Prova: Se $a, b \in A = \cup_{i\in I} A_i$ e $c \in \cap_{i\in I} A_i$, $a \in A_j$ e $b \in A_k$, $j, k \in I$.

Como cada A_i é conexo por caminhos, $i \in I$, existem caminhos $\gamma_a : [0,1] \to A_j$, que liga 'a' a 'c', e $\gamma_b : [0,1] \to A_k$, que liga 'c' a 'b'.

Logo $\gamma_a \vee \gamma_b$ é um caminho em A que liga 'a' a 'b'. □

Proposição

Sejam (X, ρ) (Y, σ) *espaços métricos,* $\Pi = X \times Y$ *e* (Π, π_p).

Então, Π *será conexo por caminhos se, e só se,* X *e* Y *o forem.*

Prova: Basta usar a Proposição anterior e repetir a prova feita para produto de conexos. □

Proposição

Sejam (X,ρ) (Y,σ) espaços métricos, $\Pi = X \times Y$ e (Π, π_p).

Então, Π será conexo por caminhos se, e só se, X e Y o forem.

Prova: Basta usar a Proposição anterior e repetir a prova feita para produto de conexos. $\square$

Exemplo (Conexos que não são conexos por caminhos)

Se $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ for dada por $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, então

$$A = G_f \cup \{(0,1)\} = \left\{\left(x, \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,\infty)\right\} \cup \{(0,1)\}$$

é conexo mas não é conexo por caminhos.

Localmente conexos por caminhos

Definição

Um espaço métrico (X, ρ) será localmente conexo por caminhos se, e somente se, para todo $x \in X$, e aberto V_x com $x \in V_x$ existir um aberto e conexo por caminhos $x \in U_x \subset V_x$.

Exemplo

Todo espaço vetorial normado é localmente conexo por caminhos.

Localmente conexos por caminhos

Definição

Um espaço métrico (X, ρ) será localmente conexo por caminhos se, e somente se, para todo $x \in X$, e aberto V_x com $x \in V_x$ existir um aberto e conexo por caminhos $x \in U_x \subset V_x$.

Exemplo

Todo espaço vetorial normado é localmente conexo por caminhos.

Exemplo

Todo aberto de um espaço localmente conexo por caminhos é localmente conexo por caminhos.

Exemplo

Existem espaços conexos por caminhos que não são localmente conexos por caminhos. Basta tomar o conjunto

$$\left\{\left(x, \cos\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \infty)\right\} \cup \{0\} \times [-1, 1] \cup (0, \infty) \times \{1\}$$

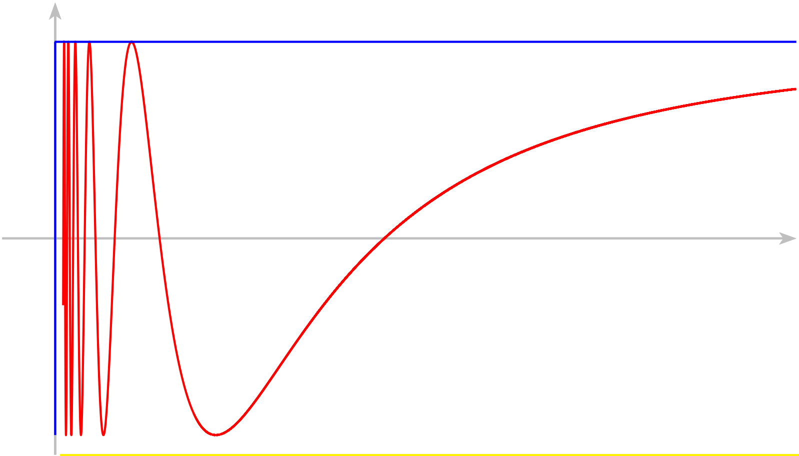
Exemplo

Todo aberto de um espaço localmente conexo por caminhos é localmente conexo por caminhos.

Exemplo

Existem espaços conexos por caminhos que não são localmente conexos por caminhos. Basta tomar o conjunto

$$\left\{\left(x, \cos\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,\infty)\right\} \cup \{0\} \times [-1,1] \cup (0,\infty) \times \{1\}$$



Conexo por caminhos que não é localmente conexo por caminhos

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico localmente conexo por caminhos.

Então (X, ρ) será conexo por caminhos, se e só se, for conexo.

Prova: Para $z \in X$ seja $A_z = \{x \in X : \exists$ caminho que liga z a $x\}$.

Note que $A_z \neq \emptyset$ e aberto. Note que A_z^c também é aberto.

Desta forma, se X é conexo, $A_z = X$ e X é conexo por caminhos.

A volta é imediata.

Corolário

Um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ será conexo se, e somente se, for conexo por caminhos.

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico localmente conexo por caminhos.

Então (X, ρ) será conexo por caminhos, se e só se, for conexo.

Prova: Para $z \in X$ seja $A_z = \{x \in X : \exists$ caminho que liga z a $x\}$.

Note que $A_z \neq \emptyset$ e aberto. Note que A_z^c também é aberto.

Desta forma, se X é conexo, $A_z = X$ e X é conexo por caminhos.

A volta é imediata.

Corolário

Um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ será conexo se, e somente se, for conexo por caminhos.

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico localmente conexo por caminhos. Então (X, ρ) será conexo por caminhos, se e só se, for conexo.

Prova: Para $z \in X$ seja $A_z = \{x \in X : \exists$ caminho que liga z a $x\}$. Note que $A_z \neq \varnothing$ e aberto. Note que A_z^c também é aberto. Desta forma, se X é conexo, $A_z = X$ e X é conexo por caminhos. A volta é imediata.

Corolário

Um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ será conexo se, e somente se, for conexo por caminhos.

Componentes conexas

Definição

Seja (X, ρ) espaço métrico e $x \in X$.

A componente conexa C_x de x em X é a união de todos os subconjuntos conexos de X que contêm x.

Observação

(1) *C_x é conexo como união de conexos com interseção não vazia.*

(2) *$C_x \neq \varnothing$ e é o maior subconjunto conexo de X que contém x.*

(3) *$C_x \cap C_y \neq \varnothing \Rightarrow C_x = C_y$. De fato, se $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, $C_x \cup C_y$ é um conexo que contém x e y. Logo $C_z \supset C_x \cup C_y \supset C_z$, para $z = x, y$.*

(4) *A família $\{C_x : x \in X\}$ das componentes conexas de X nos fornece uma partição de X em partes disjuntas.*

(5) *Toda componente conexa é fechada pois seu fecho é conexo.*

(6) *Nem sempre as componentes conexas são abertas (ex. $\mathbb{Q}$). No entanto, se X tiver um número finito de componentes conexas estas serão também abertas.*

Observação

(1) C_x *é conexo como união de conexos com interseção não vazia.*

(2) $C_x \neq \emptyset$ *e é o maior subconjunto conexo de* X *que contém* x.

(3) $C_x \cap C_y \neq \emptyset \Rightarrow C_x = C_y$. *De fato, se* $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, $C_x \cup C_y$ *é um conexo que contém* x *e* y. *Logo* $C_z \supset C_x \cup C_y \supset C_z$, *para* $z = x, y$.

(4) *A família* $\{C_x : x \in X\}$ *das componentes conexas de* X *nos fornece uma partição de* X *em partes disjuntas.*

(5) *Toda componente conexa é fechada pois seu fecho é conexo.*

(6) *Nem sempre as componentes conexas são abertas (ex.* $\mathbb{Q}$*). No entanto, se* X *tiver um número finito de componentes conexas estas serão também abertas.*

Observação

(1) C_x é conexo como união de conexos com interseção não vazia.

(2) $C_x \neq \varnothing$ e é o maior subconjunto conexo de X que contém x.

(3) $C_x \cap C_y \neq \varnothing \Rightarrow C_x = C_y$. De fato, se $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, $C_x \cup C_y$ é um conexo que contém x e y. Logo $C_z \supset C_x \cup C_y \supset C_z$, para $z = x, y$.

(4) A família $\{C_x : x \in X\}$ das componentes conexas de X nos fornece uma partição de X em partes disjuntas.

(5) Toda componente conexa é fechada pois seu fecho é conexo.

(6) Nem sempre as componentes conexas são abertas (ex. $\mathbb{Q}$). No entanto, se X tiver um número finito de componentes conexas estas serão também abertas.

Observação

(1) *C_x é conexo como união de conexos com interseção não vazia.*

(2) *$C_x \neq \varnothing$ e é o maior subconjunto conexo de X que contém x.*

(3) *$C_x \cap C_y \neq \varnothing \Rightarrow C_x = C_y$. De fato, se $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, $C_x \cup C_y$ é um conexo que contém x e y. Logo $C_z \supset C_x \cup C_y \supset C_z$, para $z = x, y$.*

(4) *A família $\{C_x : x \in X\}$ das componentes conexas de X nos fornece uma partição de X em partes disjuntas.*

(5) *Toda componente conexa é fechada pois seu fecho é conexo.*

(6) *Nem sempre as componentes conexas são abertas (ex. $\mathbb{Q}$). No entanto, se X tiver um número finito de componentes conexas estas serão também abertas.*

Observação

(1) C_x *é conexo como união de conexos com interseção não vazia.*

(2) $C_x \neq \varnothing$ *e é o maior subconjunto conexo de* X *que contém* x.

(3) $C_x \cap C_y \neq \varnothing \Rightarrow C_x = C_y$. *De fato, se* $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, $C_x \cup C_y$ *é um conexo que contém* x *e* y. *Logo* $C_z \supset C_x \cup C_y \supset C_z$, *para* $z = x, y$.

(4) *A família* $\{C_x : x \in X\}$ *das componentes conexas de* X *nos fornece uma partição de* X *em partes disjuntas.*

(5) *Toda componente conexa é fechada pois seu fecho é conexo.*

(6) *Nem sempre as componentes conexas são abertas (ex.* $\mathbb{Q}$*). No entanto, se* X *tiver um número finito de componentes conexas estas serão também abertas.*

Observação

(1) *C_x é conexo como união de conexos com interseção não vazia.*

(2) *$C_x \neq \varnothing$ e é o maior subconjunto conexo de X que contém x.*

(3) *$C_x \cap C_y \neq \varnothing \Rightarrow C_x = C_y$. De fato, se $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, $C_x \cup C_y$ é um conexo que contém x e y. Logo $C_z \supset C_x \cup C_y \supset C_z$, para $z = x, y$.*

(4) *A família $\{C_x : x \in X\}$ das componentes conexas de X nos fornece uma partição de X em partes disjuntas.*

(5) *Toda componente conexa é fechada pois seu fecho é conexo.*

(6) *Nem sempre as componentes conexas são abertas (ex. $\mathbb{Q}$). No entanto, se X tiver um número finito de componentes conexas estas serão também abertas.*