Espaços Métricos
Espaços Conexos
Aula 08

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

15 de Setembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Todo conexo na reta é um intervalo

Exemplo

Todo conexo na reta é um intervalo.

Basta ver que, se X é conexo em $\mathbb{R}$, $a, b \in X$ e $a < c < b$, então $c \in X$.

De fato, se $c \notin X$, $(-\infty, c) \cap X$ e $(c, \infty) \cap X$ são abertos disjuntos, não vazios e sua união é X.

Exercício

Mostre o teorema do valor intermediário.

União de conexos com um elemento em comum é conexa

Proposição

Seja (X,ρ) um espaço métrico.

Se $\{A_i : i \in I\}$ for uma família de conjuntos conexos e $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$,

então $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ será conexo.

Prova:

Sejam $U, V \subset A$ abertos em A com $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = A$ e

$$a \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap U.$$

Note que $A_i = (U \cap A_i) \cup (V \cap A_i)$, $(U \cap A_i) \cap (V \cap A_i) = \varnothing$,

$U \cap A_i$, $V \cap A_i$ são abertos em A_i e $a \in (U \cap A_i)$ para todo $i \in I$.

Como A_i é conexo, $V \cap A_i = \varnothing$, para todo $i \in I$ e $V = \varnothing$. $\square$

Esta proposição nos dá o seguinte resultado de caracterização de conexos.

Corolário

Um espaço métrico (X, ρ) será conexo se, e somente se, quaisquer dois pontos de X estiverem contidos em algum subconjunto conexo.

Prova: Se (X, ρ) é conexo o resultado é óbvio. Para a recíproca, fixe $x_1 \in X$ e seja C_x um conexo que contém $\{x_1, x\}$. Do resultado anterior $X = \cup_{x \in X} C_x$ é conexo.

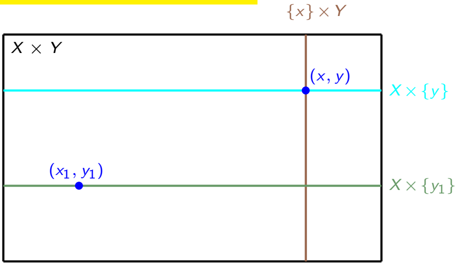
Produto de conexos é conexo

A proposiçãa seguir também segue da proposição anterior.

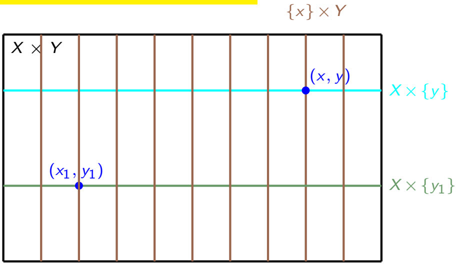
Proposição

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos, $\Pi = X \times Y$ e (Π, π_p) o espaço produto. Então, Π será conexo se, e somente se, X e Y forem conexos.

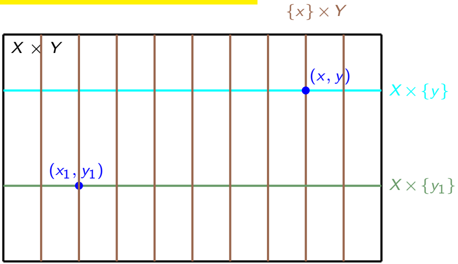
Prova: Como as projeções são funções contínuas segue que, se Π é conexo, então X e Y são conexos.



Prova: Como as projeções são funções contínuas segue que, se Π é conexo, então X e Y são conexos.



Prova: Como as projeções são funções contínuas segue que, se Π é conexo, então X e Y são conexos.



Por outro lado, se X e Y são conexos os conjuntos $X \times \{y\}$ e $\{x\} \times Y$ e $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ são conexos $\forall (x, y) \in \Pi$. Logo, fixado $(x_1, y_1) \in \Pi$, $\Pi = \bigcup_{x \in X} \{(X \times \{y_1\}) \cup (\{x\} \times Y)\}$ é conexo. $\square$

Exercício

Sejam (X_i, ρ_i), $1 \leqslant i \leqslant N$, espaços métricos, $\Pi = \prod_{i=1}^{N} X_i$ e (Π, π_p) o espaço produto. Mostre que Π será conexo se, e somente se, cada X_i for conexo $1 \leqslant i \leqslant N$.

Exemplo

O cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo.

Solução: Basta ver que o cilindro é homeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

Exemplo

$\mathbb{R}^n$ com a métrica usual é conexo e, para $n \geqslant 2$, $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ é conexo.

Solução: Basta ver que $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ homeomorfo a $S^{n-1} \times (0, \infty)$.

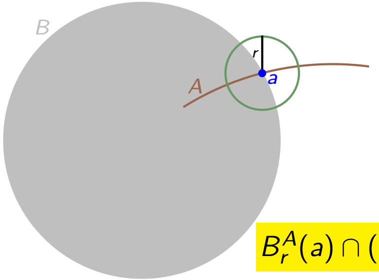
Teorema da Alfândega

Proposição (Teorema da Alfândega)

Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico (X, ρ).

Se A é conexo, $A \cap B \neq \varnothing$ e $A \cap B^c \neq \varnothing$, então $A \cap \partial B \neq \varnothing$.

Prova: Note que $A \cap B \neq \varnothing$ e $A \cap B^c \neq \varnothing$. Assim $A \cap B$ não é vazio nem todo A. Logo a fronteira de $A \cap B$ em A contém um ponto $\{a\}$, ou seja, para qualquer $r > 0$,



$$B_r^A(a) \cap (A \cap B) \neq \varnothing \Rightarrow B_r^X(a) \cap B \neq \varnothing$$ e

$$B_r^A(a) \cap \underbrace{(A \backslash (A \cap B))}_{A \cap B^c} \neq \varnothing \Rightarrow B_r^X(a) \cap B^c \neq \varnothing.$$

Desta forma, $a \in \partial B$ e o resultado está provado. $\square$

Espaços Conexos por Caminhos

Definição (Caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Um caminho em (X, ρ) é uma função contínua $\gamma : [0, 1] \to X$.*
- *Se $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$, a é o ponto inicial e b o ponto final do caminho e diremos que o caminho liga 'a' a 'b'.*
- *Se $a = b$ diremos que o caminho será fechado.*

Espaços Conexos por Caminhos

Definição (Caminhos)

Seja (X,ρ) um espaço métrico.

- *Um caminho em (X,ρ) é uma função contínua $\gamma:[0,1]\to X$.*
- *Se $\gamma(0)=a$ e $\gamma(1)=b$, a é o ponto inicial e b o ponto final do caminho e diremos que o caminho liga 'a' a 'b'.*
- *Se $a=b$ diremos que o caminho será fechado.*

Espaços Conexos por Caminhos

Definição (Caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Um caminho em (X, ρ) é uma função contínua $\gamma : [0, 1] \to X$.*
- *Se $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$, a é o ponto inicial e b o ponto final do caminho e diremos que o caminho liga 'a' a 'b'.*
- *Se $a = b$ diremos que o caminho será fechado.*

Definição (Conexo por caminhos)

Seja (X,ρ) um espaço métrico.

- *Diremos que (X,ρ) será conexo por caminhos se, e somente se, dados dois pontos $a,b \in X$ existir um caminho que liga 'a' a 'b'.*
- *Seja $E \subset X$ e ρ_E a métrica induzida em E por ρ. Diremos que E será conexo por caminhos se, e somente se, (E,ρ_E) for conexo por caminhos.*

Definição (Conexo por caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Diremos que (X, ρ) será conexo por caminhos se, e somente se, dados dois pontos $a, b \in X$ existir um caminho que liga 'a' a 'b'.*
- *Seja $E \subset X$ e ρ_E a métrica induzida em E por ρ. Diremos que E será conexo por caminhos se, e somente se, (E, ρ_E) for conexo por caminhos.*

Exemplo

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Se existir um caminho γ que liga x a y, existirá um caminho $-\gamma$ que liga y a x.*

  Basta tomar $-\gamma : [0,1] \to X$ definida por $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$.

- *Se existirem caminhos γ_1, que liga x a y, e γ_2, que liga y a z, existirá um caminho $\gamma_1 \vee \gamma_2$ que liga x a z.*

  Basta tomar $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [0,1] \to X$ definida por

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

  Neste caso $\gamma_1 \vee \gamma_2$ será chamado justaposição de γ_1 e γ_2.

Exemplo

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Se existir um caminho γ que liga x a y, existirá um caminho $-\gamma$ que liga y a x.*

  Basta tomar $-\gamma : [0,1] \to X$ definida por $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$.

- *Se existirem caminhos γ_1, que liga x a y, e γ_2, que liga y a z, existirá um caminho $\gamma_1 \vee \gamma_2$ que liga x a z.*

  Basta tomar $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [0,1] \to X$ definida por

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

  Neste caso $\gamma_1 \vee \gamma_2$ será chamado justaposição de γ_1 e γ_2.

Exemplo (Convexos)

Seja X um espaço vetorial.

Um subconjunto E de X será chamado convexo se, e somente se,

para cada dois pontos $a, b \in E$, $\{ta+(1-t)b,\ t\in[0,1]\} \subset E$.

Exemplo

Se $(X, \|\cdot\|)$ for um espaço vetorial normado.

Toda bola em X é convexa.

Exemplo

Se $(X, \|\cdot\|)$ for um espaço vetorial normado.

Todo subconjunto convexo de X será conexo por caminhos

em (X, ρ), onde ρ é a métrica induzida em X pela norma.

Proposição

Todo espaço métrico (X, ρ) conexo por caminhos é conexo.

Prova: Note que, se $a, b \in X$, existe um caminho γ que liga 'a' a 'b'.

Logo $\gamma([a, b])$ é um conexo que contém a, b.

A conexidade de (X, ρ) agora segue de um resultado anterior. $\square$

Proposição

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos.

Se (X, ρ) for conexo por caminhos e existir uma função contínua e sobrejetora $f : X \to Y$, então (Y, σ) será conexo por caminhos.

Prova: Como f é sobrejetora, se $\alpha, \beta \in Y$ existem $a, b \in X$ tais que $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$.

Como X é conexo por caminhos, existe um caminho $\gamma : [0,1] \to X$ que liga 'a' a 'b'.

Desta forma, $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ é um caminho que liga α a β e Y é conexo por caminhos. □

Proposição

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos.

Se (X, ρ) for conexo por caminhos e existir uma função contínua e sobrejetora $f : X \to Y$, então (Y, σ) será conexo por caminhos.

Prova: Como f é sobrejetora, se $\alpha, \beta \in Y$ existem $a, b \in X$ tais que $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$.

Como X é conexo por caminhos, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \to X$ que liga 'a' a 'b'.

Desta forma, $f \circ \gamma : [0, 1] \to Y$ é um caminho que liga α a β e Y é conexo por caminhos. □

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Se $\{A_i : i \in I\}$ for uma família de conexos por caminhos de X

e $\cap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, então $\cup_{i \in I} A_i$ será conexo por caminhos.

Prova: Se $a, b \in A = \cup_{i \in I} A_i$ e $c \in \cap_{i \in I} A_i$, $a \in A_j$ e $b \in A_k$, $j, k \in I$.

Como cada A_i é conexo por caminhos, $i \in I$, existem caminhos

$\gamma_a : [0,1] \to A_j$, que liga 'a' a 'c', e $\gamma_b : [0,1] \to A_k$, que liga 'c' a 'b'.

Logo $\gamma_a \vee \gamma_b$ é um caminho em A que liga 'a' a 'b'. □

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

Se $\{A_i : i \in I\}$ for uma família de conexos por caminhos de X

e $\cap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, então $\cup_{i \in I} A_i$ será conexo por caminhos.

Prova: Se $a, b \in A = \cup_{i \in I} A_i$ e $c \in \cap_{i \in I} A_i$, $a \in A_j$ e $b \in A_k$, $j, k \in I$.

Como cada A_i é conexo por caminhos, $i \in I$, existem caminhos

$\gamma_a : [0, 1] \to A_j$, que liga '$a$' a '$c$', e $\gamma_b : [0, 1] \to A_k$, que liga '$c$' a '$b$'.

Logo $\gamma_a \vee \gamma_b$ é um caminho em A que liga 'a' a 'b'. $\square$

Proposição

Sejam (X, ρ) (Y, σ) espaços métricos, $\Pi = X \times Y$ e (Π, π_p).

Então, Π será conexo por caminhos se, e só se, X e Y o forem.

Prova: Basta usar a Proposição anterior e repetir a prova feita para produto de conexos. $\square$

Proposição

Sejam (X,ρ) (Y,σ) *espaços métricos,* $\Pi = X \times Y$ *e* (Π, π_p).

Então, Π *será conexo por caminhos se, e só se,* X *e* Y *o forem.*

Prova: Basta usar a Proposição anterior e repetir a prova feita para produto de conexos. $\square$

Exemplo (Conexos que não são conexos por caminhos)

Se $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *for dada por* $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, *então*

$$A = G_f \cup \{(0,1)\} = \left\{\left(x, \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,\infty)\right\} \cup \{(0,1)\}$$

é conexo mas não é conexo por caminhos.

De fato: Seja $\gamma : [0,1] \to A$ um caminho em A tal que $\gamma(0) = (0,1)$.
Mostremos que $\alpha(t) := P_1 \circ \gamma(t) = 0$, para todo $t \in [0,1]$.

Se $\hat{f}(t) = \cos\frac{1}{t}$, $t > 0$, e $\hat{f}(0) = 1$. Então

$$A = G_{\hat{f}} \quad \text{e} \quad \gamma(t) = (\alpha(t), \hat{f}(\alpha(t))),\ t \in [0,1].$$

Exemplo (Conexos que não são conexos por caminhos)

Se $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *for dada por* $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, *então*

$$A = G_f \cup \{(0,1)\} = \left\{\left(x, \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,\infty)\right\} \cup \{(0,1)\}$$

é conexo mas não é conexo por caminhos.

De fato: Seja $\gamma : [0,1] \to A$ um caminho em A tal que $\gamma(0) = (0,1)$.
Mostremos que $\alpha(t) := P_1 \circ \gamma(t) = 0$, para todo $t \in [0,1]$.

Se $\hat{f}(t) = \cos\frac{1}{t}$, $t > 0$, e $\hat{f}(0) = 1$. Então

$$A = G_{\hat{f}} \quad \text{e} \quad \gamma(t) = (\alpha(t), \hat{f}(\alpha(t))),\ t \in [0,1].$$

Se $I = \{t \in [0,1] : \alpha(t) = 0\} = \alpha^{-1}(0) \ni 0$, I é fechado em $[0,1]$.

Se $\tau \in I$, $\alpha(\tau) = 0$, $\hat{f}(\alpha(\tau)) = 1$. Da continuidade de γ existe $r > 0$

tal que, $t \in B_r^{[0,1]}(\tau) \Rightarrow |\gamma(t) - (0,1)| < 1$ e $0 \in \alpha(B_r^{[0,1]}(\tau))$ é conexo.

Segue que $\alpha(B_r^{[0,1]}(\tau)) \ni 0$ é um intervalo ou $\{0\}$.

Se $\alpha(B_r^{[0,1]}(\tau))$ for um intervalo, ele deve conter pontos

da forma $\frac{1}{(2n+1)\pi} = \alpha(t_n)$. Isto nos leva a uma contradição, pois

$$\gamma(t_n) = \left(\frac{1}{(2n+1)\pi}, -1\right) \quad \text{e} \quad |\gamma(t_n) - (0,1)| > 2.$$

Logo, $\alpha(B_r^{[0,1]}(\tau)) = \{0\}$ e $B_r^{[0,1]}(\tau) \subset I$ e I é aberto.

Segue que $I = [0,1]$ e A não é conexo por caminhos. $\square$

Se $I = \{t \in [0,1] : \alpha(t) = 0\} = \alpha^{-1}(0) \ni 0$, I é fechado em $[0,1]$.

Se $\tau \in I$, $\alpha(\tau) = 0$, $\hat{f}(\alpha(\tau)) = 1$. Da continuidade de γ existe $r > 0$ tal que, $t \in B_r^{[0,1]}(\tau) \Rightarrow |\gamma(t) - (0,1)| < 1$ e $0 \in \alpha(B_r^{[0,1]}(\tau))$ é conexo. Segue que $\alpha(B_r^{[0,1]}(\tau)) \ni 0$ é um intervalo ou $\{0\}$.

Se $\alpha(B_r^{[0,1]}(\tau))$ for um intervalo, ele deve conter pontos da forma $\frac{1}{(2n+1)\pi} = \alpha(t_n)$. Isto nos leva a uma contradição, pois

$$\gamma(t_n) = \left(\frac{1}{(2n+1)\pi}, -1\right) \quad \text{e} \quad |\gamma(t_n) - (0,1)| > 2.$$

Logo, $\alpha(B_r^{[0,1]}(\tau)) = \{0\}$ e $B_r^{[0,1]}(\tau) \subset I$ e I é aberto.
Segue que $I = [0,1]$ e A não é conexo por caminhos. $\square$

Exemplo

Para todo $n \geq 2$, $R^n \backslash \{0\}$ é conexo por caminhos.

De fato: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(1) Se $0 \notin [x, y]$, considere o caminho $\gamma(t) = ty + (1-t)x$, $t \in [0, 1]$, que liga x a y em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(2) Se $0 = t_0 y + (1-t_0)x$ para algum $t_0 \in (0, 1)$, como $n \geq 2$, seja $z \in \mathbb{R}^n \backslash \{tx = t\frac{t_0}{1-t_0} y : t \in \mathbb{R}\}$. Segue que $0 \notin [x, z] \cup [z, y]$, e a justaposição de $\gamma_1(t) = tz + (1-t)x$ e $\gamma_2(t) = ty + (1-t)z$ liga x a y em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Exemplo

Para todo $n \geq 2$, $R^n \backslash \{0\}$ é conexo por caminhos.

De fato: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(1) Se $0 \notin [x, y]$, considere o caminho $\gamma(t) = ty + (1-t)x$, $t \in [0, 1]$, que liga x a y em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(2) Se $0 = t_0 y + (1-t_0)x$ para algum $t_0 \in (0, 1)$, como $n \geq 2$, seja $z \in \mathbb{R}^n \backslash \{tx = t\frac{t_0}{1-t_0} y : t \in \mathbb{R}\}$. Segue que $0 \notin [x, z] \cup [z, y]$, e a justaposição de $\gamma_1(t) = tz + (1-t)x$ e $\gamma_2(t) = ty + (1-t)z$ liga x a y em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Exemplo

Para todo $n \geq 2$, $R^n \backslash \{0\}$ é conexo por caminhos.

De fato: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(1) Se $0 \notin [x, y]$, considere o caminho $\gamma(t) = ty + (1-t)x$, $t \in [0, 1]$, que liga x a y em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

(2) Se $0 = t_0 y + (1 - t_0)x$ para algum $t_0 \in (0, 1)$, como $n \geq 2$, seja $z \in \mathbb{R}^n \backslash \{tx = t\frac{t_0}{1-t_0} y : t \in \mathbb{R}\}$. Segue que $0 \notin [x, z] \cup [z, y]$, e a justaposição de $\gamma_1(t) = tz + (1-t)x$ e $\gamma_2(t) = ty + (1-t)z$ liga x a y em $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Exercício

Se X é um espaço vetorial normado com $\dim X > 1$, mostre que:

(1) *$X\backslash\{a\}$ é conexo por caminhos, para todo $a \in X$.*

(2) *Se $A \subset X$ é enumerável, $X\backslash A$ é conexo por caminhos.*

Exemplo

A $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, $n \geq 1$, é conexa por caminhos.

De fato: Note que, $f : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to S^n$, definida por $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$, é contínua e sobrejetora. Como $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ é conexo por caminhos, o resultado segue. □

Exercício

Se X é um espaço vetorial normado com $\dim X > 1$, mostre que:

(1) *$X \backslash \{a\}$ é conexo por caminhos, para todo $a \in X$.*

(2) *Se $A \subset X$ é enumerável, $X \backslash A$ é conexo por caminhos.*

Exemplo

A $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, $n \geq 1$, é conexa por caminhos.

De fato: Note que, $f : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to S^n$, definida por $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$, é contínua e sobrejetora. Como $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ é conexo por caminhos, o resultado segue. $\square$