Espaços Métricos
Espaços Conexos
Aula 07

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

14 de Setembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Espaços Conexos

Definição

Um espaço métrico (X, ρ) será conexo se, e somente se, X não for união de dois subconjuntos abertos disjuntos e não vazios de X.

Seja $A \subset X$ e ρ_A a métrica induzida em A ela métrica ρ de X. Se (A, ρ_A) for conexo, diremos que A será conexo.

Proposição

Seja (X, ρ) espaço métrico. São equivalentes:

(1) *X é conexo;*

(2) *X e $\varnothing$ são os únicos subconjuntos de X que são, ao mesmo tempo, abertos e fechados.*

(3) *Se $A \subset X$ tem fronteira vazia, então $A = X$ ou $A = \varnothing$.*

Prova:

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Se $A \subset X$ for, ao mesmo tempo, aberto e fechado então A^c será, ao mesmo tempo, aberto e fechado. Além disso $A \cup A^c = X$. Segue que $A = X$ ou $A = \varnothing$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Se $A \subset X$ e $\partial A = \varnothing$, A é aberto e A^c é aberto. Logo A e A^c também são fechados e $A = X$ ou $A = \varnothing$.

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ Se $X = A \cup A^c$ com A e A^c abertos, então $\partial A = \varnothing$ e $A = X$ ou $A = \varnothing$. Logo X é conexo.

Exemplo

(1) *Os subconjuntos* $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ *de* $\mathbb{R}$ *são desconexos.*

(2) $\mathbb{R}$ *com a métrica usual é conexo.*

De fato: *Suponha que existam* $A, B \subset \mathbb{R}$ *não vazios que são, ao mesmo tempo, abertos e fechados e tais que* $A \cup B = \mathbb{R}$.

Seja $a \in A$ *e* $b \in B$ *e digamos que* $a < b$. *O conjunto* $A_b = \{x \in A : x < b\} \neq \emptyset$ *é limitado superiormente.*

Se $c = \sup A_b \leq b$ *e* $c \in A_b^- \subset A^-$. *Como* $A = A^-$, $c \in A$ *e* $c < b$.

Como A *é aberto existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $c + \epsilon < b$ *e* $(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset A$.

Isto está em contradição com $c = \sup A_b$.

Conexidade como invariante topológico

Proposição

Sejam (X,ρ) e (Y,σ) espaços métricos. Se (X,ρ) for conexo, $f : X \to Y$ for contínua e $Z = f(X)$, então (Z,σ_Z) será conexo.

Prova: É claro que $f : X \to Z$ é contínua e sobrejetora.

Suponha que existam $A, B \subset Z$ abertos disjuntos com $A \cup B = Z$.

Da continuidade de f, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos de X, disjuntos e $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Assim, ou $f^{-1}(A) = X$ ou $f^{-1}(A) = \varnothing$ e, portanto, $A = Z$ ou $A = \varnothing$. $\square$

Prova: É claro que $f : X \to Z$ é contínua e sobrejetora.
Suponha que existam $A, B \subset Z$ abertos disjuntos com $A \cup B = Z$.

Da continuidade de f, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos de X, disjuntos e $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Assim, ou $f^{-1}(A) = X$ ou $f^{-1}(A) = \varnothing$ e, portanto, $A = Z$ ou $A = \varnothing$. $\square$

Corolário (A conexidade é um invariante topológico)
Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos homeomorfos.
Então (X, ρ) será conexo se, somente se, (Y, σ) for conexo.

Todo intervalo é conexo

Exemplo

Todo intervalo é conexo.

Solução: Basta ver que, (a, b), $a < b$, de $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$

$$(a, b) \ni x \mapsto \frac{b-a}{b-x} - 1 \in (0, \infty) \ni x \mapsto \ln x \in \mathbb{R}$$

e observar que, se $I = (a, b], [a, b)$ ou $[a, b]$, $(a, b) \subset I \subset (a, b)^-$.

Corolário (S^1 não é homeomorfa a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$)

O intervalo $[0, 2\pi)$ e a circunferência unitária $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.

Corolário (Matrizes invertíveis são um espaço desconexo)

O conjunto $G_n \subset \mathbb{R}^{n^2}$ das matrizes $n \times n$ invertíveis não é conexo.

O fecho de um conexo é conexo

Proposição

Sejam (X, ρ) um espaço métrico. Se $E \subset X$ for conexo, então E^- será conexo.

Prova: Podemos supor que $E^- = X$. Se $A, B \subset X$ forem abertos disjuntos de X tais que $A \cup B = X$, $A \cap E$ e $B \cap E$ serão abertos de E e $(A \cap E) \cup (B \cap E) = E$.

Como E é conexo $A \cap E = \varnothing \Leftrightarrow E \subset A^c$ ou $B \cap E = \varnothing \Leftrightarrow E \subset B^c$. Logo $X = E^- \subset A^c \subset X$ ou $X = E^- \subset B^c \subset X$.

Isto mostra que ou $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ e portanto E^- é conexo. $\square$

Corolário

Sejam (X, ρ) um espaço métrico e $E \subset F \subset E^{-} \subset X$.

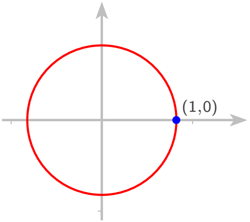
Se E for conexo, então F será conexo.

Prova: Basta ver que o fecho de E em F é F. $\square$

Exemplo

S^1 com a métrica induzida pela métrica usual do plano é conexa.

Solução: Basta ver que $A = S^1 \backslash \{(1,0)\}$ é homeomorfa a $(0, 2\pi)$ e que $A^- = S^1$.



Isto também segue usando que a função $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi)$, é contínua.

Exemplo

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

Então o gráfico G_f de f é homeomorfo a I e portanto conexo.

Se $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ for dada por $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, então

$$G_f^- = \left\{\left(x, \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, \infty)\right\}^- = G_f \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$$

é conexo.

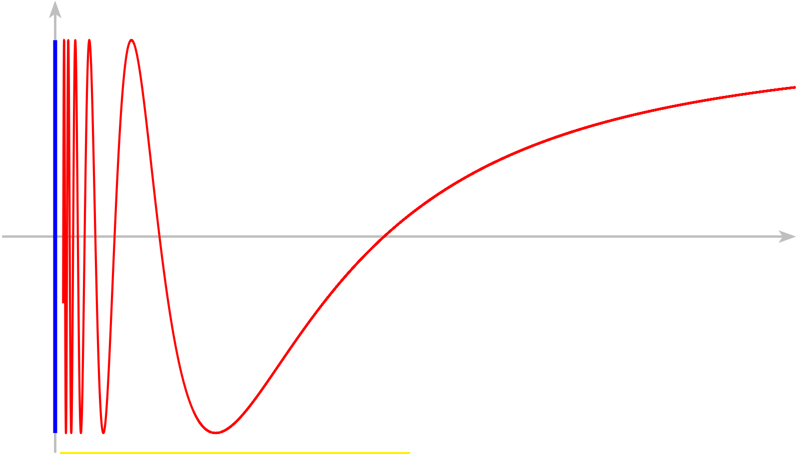


Gráfico de $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Todo conexo na reta é um intervalo

Exemplo

Todo conexo na reta é um intervalo.

Basta ver que, se X é conexo em $\mathbb{R}$, $a,b \in X$ e $a < c < b$, então $c \in X$.
De fato, se $c \notin X$, $(-\infty, c) \cap X$ e $(c, \infty) \cap X$ são abertos disjuntos, não vazios e sua união é X.

Exercício

Mostre o teorema do valor intermediário.

União de conexos com um elemento em comum é conexa

Proposição

Seja (X, ρ) um espaço métrico.
Se $\{A_i : i \in I\}$ for uma família de conjuntos conexos e $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$,
então $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ será conexo.

Prova:

Sejam $U, V \subset A$ abertos em A com $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = A$ e

$$a \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap U.$$

Note que $A_i = (U \cap A_i) \cup (V \cap A_i)$, $(U \cap A_i) \cap (V \cap A_i) = \varnothing$, $U \cap A_i$, $V \cap A_i$ são abertos em A_i e $a \in (U \cap A_i)$ para todo $i \in I$.

Como A_i é conexo, $V \cap A_i = \varnothing$, para todo $i \in I$ e $V = \varnothing$. $\square$

O próximo resultado segue diretamente da proposição anterior.

Corolário

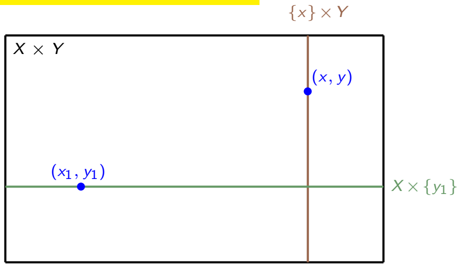
Um espaço métrico (X, ρ) será conexo se, e somente se, quaisquer dois pontos de X estiverem contidos em algum subconjunto conexo.

Produto de conexos é conexo

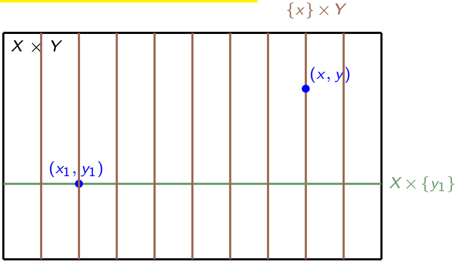
Proposição

Sejam (X, ρ) e (Y, σ) espaços métricos, $\Pi = X \times Y$ e (Π, π_p) o espaço produto. Então, Π será conexo se, e somente se, X e Y forem conexos.

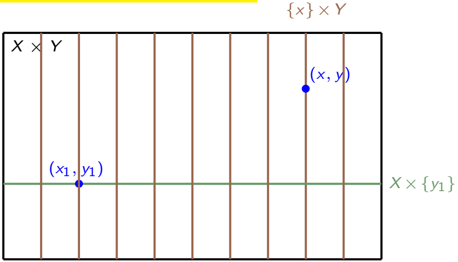
Prova: Como as projeções são funções contínuas segue que, se Π é conexo, então X e Y são conexos.



Prova: Como as projeções são funções contínuas segue que, se Π é conexo, então X e Y são conexos.



Prova: Como as projeções são funções contínuas segue que, se Π é conexo, então X e Y são conexos.



Por outro lado, se X e Y são conexos, fixado $(x_1, y_1) \in \Pi$ os conjuntos $(X \times \{y_1\}) \cup (\{x\} \times Y)$ são conexos, $x \in X$, e contém (x_1, y_1). Logo $\Pi = \bigcup_{x \in X} \{(X \times \{y_1\}) \cup (\{x\} \times Y)\}$ é conexo. $\square$

Exercício

Sejam (X_i, ρ_i), $1 \leqslant i \leqslant N$, espaços métricos, $\Pi = \prod_{i=1}^{N} X_i$ e (Π, π_p) o espaço produto. Mostre que Π será conexo se, e somente se, cada X_i for conexo $1 \leqslant i \leqslant N$.

Exemplo

O cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo.

Solução: Basta ver que o cilindro é homeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

Exemplo

$\mathbb{R}^n$ com a métrica usual é conexo e, para $n \geqslant 2$, $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ é conexo.

Solução: Basta ver que $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ homeomorfo a $S^n \times (0, \infty)$.

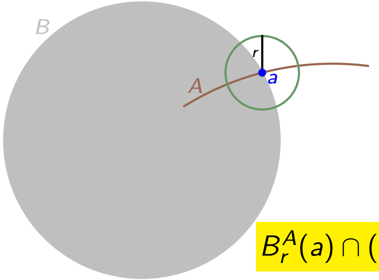
Teorema da Alfândega

Proposição (Teorema da Alfândega)

Sejam A e B subconjuntos de um espaço métrico (X, ρ).

Se A é conexo, $A \cap B \neq \varnothing$ e $A \cap B^c \neq \varnothing$, então $A \cap \partial B \neq \varnothing$.

Prova: Note que $A \cap B \neq \varnothing$ e $A \cap B^c \neq \varnothing$. Assim $A \cap B$ não é vazio nem todo A. Logo a fronteira de $A \cap B$ em A contém um ponto $\{a\}$, ou seja, para qualquer $r > 0$,



$B_r^A(a) \cap (A \cap B) \neq \varnothing \Rightarrow B_r^X(A) \cap B \neq \varnothing$ e

$B_r^A(a) \cap (A \backslash (A \cap B)) \neq \varnothing \Rightarrow B_r^X(A) \cap B^c \neq \varnothing.$

Desta forma, $a \in \partial B$ e o resultado está provado. $\square$

Espaços Conexos por Caminhos

Definição (Caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Um caminho em (X, ρ) é uma função contínua $\gamma : [0, 1] \to X$.*
- *Se $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$, a é o ponto inicial e b o ponto final do caminho e diremos que o caminho liga 'a' a 'b'.*
- *Se $a = b$ diremos que o caminho será fechado.*

Espaços Conexos por Caminhos

Definição (Caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Um caminho em (X, ρ) é uma função contínua $\gamma : [0, 1] \to X$.*
- *Se $\gamma(0) = a$ e $\gamma(1) = b$, a é o ponto inicial e b o ponto final do caminho e diremos que o caminho liga 'a' a 'b'.*
- *Se $a = b$ diremos que o caminho será fechado.*

Espaços Conexos por Caminhos

Definição (Caminhos)

Seja (X,ρ) um espaço métrico.

- *Um caminho em (X,ρ) é uma função contínua $\gamma:[0,1]\to X$.*
- *Se $\gamma(0)=a$ e $\gamma(1)=b$, a é o ponto inicial e b o ponto final do caminho e diremos que o caminho liga ‘a’ a ‘b’.*
- *Se $a=b$ diremos que o caminho será fechado.*

Definição (Conexo por caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Diremos que (X, ρ) será conexo por caminhos se, e somente se, dados dois pontos $a, b \in X$ existir um caminho que liga 'a' a 'b'.*
- *Seja $E \subset X$ e ρ_E a métrica induzida em E por ρ. Diremos que E será conexo por caminhos se, e somente se, (E, ρ_E) for conexo por caminhos.*

Definição (Conexo por caminhos)

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Diremos que (X, ρ) será conexo por caminhos se, e somente se, dados dois pontos $a, b \in X$ existir um caminho que liga 'a' a 'b'.*
- *Seja $E \subset X$ e ρ_E a métrica induzida em E por ρ. Diremos que E será conexo por caminhos se, e somente se, (E, ρ_E) for conexo por caminhos.*

Exemplo

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Se existir um caminho γ que liga x a y, existirá um caminho $-\gamma$ que liga y a x.*
  Basta tomar $-\gamma : [0, 1] \to X$ definida por $-\gamma(t) = \gamma(1 - t)$.
- *Se existirem caminhos γ_1, que liga x a y, e γ_2, que liga y a z, existirá um caminho $\gamma_1 \vee \gamma_2$ que liga x a z.*
  Basta tomar $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [0, 1] \to X$ definida por
  $$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
  Neste caso $\gamma_1 \vee \gamma_2$ será chamado justaposição de γ_1 e γ_2.

Exemplo

Seja (X, ρ) um espaço métrico.

- *Se existir um caminho γ que liga x a y, existirá um caminho $-\gamma$ que liga y a x.*

  Basta tomar $-\gamma : [0,1] \to X$ definida por $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$.

- *Se existirem caminhos γ_1, que liga x a y, e γ_2, que liga y a z, existirá um caminho $\gamma_1 \vee \gamma_2$ que liga x a z.*

  Basta tomar $\gamma_1 \vee \gamma_2 : [0,1] \to X$ definida por

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

  Neste caso $\gamma_1 \vee \gamma_2$ será chamado justaposição de γ_1 e γ_2.

Exemplo (Convexos)

Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado.

Um subconjunto E de X será chamado convexo se, e somente se, para cada dois pontos $a, b \in E$, $\{ta+(1-t)b,\ t\in[0,1]\} \subset E$.

Exemplo

Toda bola em X é convexa.

Exemplo

Todo subconjunto convexo de X é conexo por caminhos em (X, ρ) onde ρ é a métrica induzida em X pela norma.

Proposição

Todo espaço métrico (X, ρ) conexo por caminhos é conexo.

Prova: Note que, se $a, b \in X$, existe um caminho γ que liga 'a' a 'b'.
Logo $\gamma([a, b])$ é um conexo que contém a, b.
A conexidade de (X, ρ) agora segue de um resultado anterior. $\square$