

ESPAÇOS MÉTRICOS

Topologias e Homeomorfismos

Aula 06

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

12 de Setembro de 2022
Segundo Semestre de 2022

Topologias

Definição

Se $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}(X) \subset 2^X$ será chamada uma topologia em X se

- (i) X e \emptyset estão em $\mathcal{T}(X)$,
- (ii) A união qualquer de elementos de $\mathcal{T}(X)$ pertencer a $\mathcal{T}(X)$ e
- (iii) A interseção finita de elementos de $\mathcal{T}(X)$ pertencer a $\mathcal{T}(X)$.

Neste caso, os elementos de $\mathcal{T}(X)$ serão chamados abertos e o par $(X, \mathcal{T}(X))$ será chamado espaço topológico.

Comparação entre topologias

Observação

Em geral, há muitas topologias possíveis em um conjunto $X \neq \emptyset$.

- (i) *A topologia com menos abertos é $\mathcal{T}_c(X) = \{X, \emptyset\}$, chamada topologia caótica.*
- (ii) *A topologia com mais abertos é $\mathcal{T}_d(X) = 2^X$, chamada topologia discreta.*

Definição

Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto e $\mathcal{T}_i(X)$, $i = 1, 2$, duas topologias em X .

Diremos que $\mathcal{T}_1(X)$ é mais fina que $\mathcal{T}_2(X)$ se $\mathcal{T}_1(X) \supset \mathcal{T}_2(X)$.

Observação

Uma topologia $\mathcal{T}_1(X)$ é mais fina que outra topologia $\mathcal{T}_2(X)$ se $\mathcal{T}_1(X)$ tem mais abertos que $\mathcal{T}_2(X)$.

Seja (X, ρ) um espaço métrico e

$$\mathcal{T}_\rho(X) = \{O \subset X : O \text{ é aberto em } (X, \rho)\}.$$

Já vimos que \mathcal{T}_ρ é uma topologia. Esta topologia será chamada topologia induzida pela métrica ρ .

Observação

- (i) *A métrica do zero-um define a topologia discreta.*
- (ii) *Se X tem mais que um elemento, $\mathcal{T}_c(X)$ não é métrica. Isto é, não existe uma métrica em X cujos abertos são apenas \emptyset e X .*

Topologias e funções contínuas

Proposição

Sejam (X, ρ) (Y, σ) espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma função.

Defina em X a topologia (exercício) induzida por f

$$\mathcal{T}_f(X) = \{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{T}_\sigma(Y)\}.$$

Então f é contínua se, e somente se, $\mathcal{T}_\rho(X)$ é mais fina que $\mathcal{T}_f(X)$.

Observação

- (1) Se $(X, \mathcal{T}(X))$ e $(Y, \mathcal{T}(Y))$ forem espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ for uma função, diremos que f será contínua se, e somente se, $f^{-1}(O_Y) \in \mathcal{T}(X)$, para todo $O_Y \in \mathcal{T}(Y)$.
- (2) Continuidade depende da quantidade de abertos no domínio e no contradomínio, isto é, dados $(X, \mathcal{T}(X))$ e $(Y, \mathcal{T}(Y))$ espaços topológicos, quando mais (menos) abertos tem $\mathcal{T}(X)$ ($\mathcal{T}(Y)$) mais funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ existem.
- (3) Se considerarmos (X, \mathcal{T}_d) ou $(Y, \mathcal{T}_c(Y))$ todas as funções $f : X \rightarrow Y$ serão contínuas.

Métricas topologicamente equivalentes

Definição

Duas métricas serão **topologicamente equivalentes** se definem os mesmos abertos.

Exemplo

- (1) Métricas equivalentes são topologicamente equivalentes.
- (2) Se (X, ρ) é um espaço métrico e $\sigma: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é dada por

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

então ρ e σ são topologicamente equivalentes.

Solução: (1) Sejam $X \neq \emptyset$ e $\rho, \sigma : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ métricas equivalentes em X . Então, existem constantes positivas c_σ, c_ρ tais que

$$\rho(x, y) \leq c_\sigma \sigma(x, y), \text{ e } \sigma(x, y) \leq c_\rho \rho(x, y).$$

Se $A \in \mathcal{T}_\rho(X)$ e $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r^\rho(a) \subset A$. É claro que

$$B_{\frac{r}{c_\sigma}}^\sigma(a) \subset B_r^\rho(a) \subset A \text{ e } A \in \mathcal{T}_\sigma(X). \text{ Logo } \mathcal{T}_\rho(X) \subset \mathcal{T}_\sigma(X).$$

A outra inclusão é análoga.

(2) Basta ver que

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} < r \Leftrightarrow \rho(x, y) < \frac{r}{1-r}, \quad r \in (0, 1),$$

isto é,

$$B_{\frac{r}{1-r}}^\rho(x) = B_r^\sigma(x), \quad \text{para todo } r \in (0, 1) \text{ e } x \in X. \quad \square$$

Homeomorfismos

Definição

Sejam (X, ρ) (Y, σ) espaços métricos. Se $f : X \rightarrow Y$ for uma bijeção contínua e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ for contínua, f será chamada de homeomorfismo. Neste caso, (X, ρ) e (Y, σ) serão homeomorfos.

Observação

- (1) Note que se $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então existe uma correspondência biunívoca entre os abertos de X e de Y .
- (2) Pode ocorrer que $f : X \rightarrow Y$ seja contínua, bijetora e que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ não seja contínua.
- (3) Tomando em \mathbb{R} a métrica discreta ρ_d e a métrica usual ρ a identidade $f(x) = x$, de (\mathbb{R}, ρ) em (\mathbb{R}, ρ_d) , não será contínua. Basta ver que em (\mathbb{R}, ρ_d) existem abertos que não são abertos em (\mathbb{R}, ρ) .

Observação

- (1) Se $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ for dada por $f(t) = (\cos t, \sin t)$, então f será contínua, bijetora mas sua inversa será descontínua em $(1, 0)$. Note que $f|_{(0, 2\pi)} : (0, 2\pi) \rightarrow S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ é um homeomorfismo.
- (2) Neste último exemplo note que, se retirarmos um número positivo p do intervalo $[0, \pi)$, esta ação separa o domínio de f em duas partes. Ao retirar $f(p)$ de S^1 o conjunto obtido continua a ter apenas uma parte. Isto será usado para mostrar que a S^1 não é homeomorfa a um intervalo.

Espaços Conexos

Definição

Um espaço métrico (X, ρ) será conexo se, e somente se, X não for união de dois subconjuntos abertos disjuntos e não vazios de X .

Seja $A \subset X$ e ρ_A a métrica induzida em A pela métrica ρ de X .

Se (A, ρ_A) for conexo, diremos que A será conexo.

Proposição

Seja (X, ρ) espaço métrico. São equivalentes:

- (1) X é conexo;
- (2) X e \emptyset são os únicos subconjuntos de X que são, ao mesmo tempo, abertos e fechados.
- (3) Se $A \subset X$ tem fronteira vazia, então $A = X$ ou $A = \emptyset$.

Prova:

$(1) \Rightarrow (2)$. Se $A \subset X$ for, ao mesmo tempo, aberto e fechado então A^c será, ao mesmo tempo, aberto e fechado. Além disso $A \cup A^c = X$. Segue que $A = X$ ou $A = \emptyset$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Se $A \subset X$ e $\partial A = \emptyset$, A é aberto e A^c é aberto. Logo A e A^c também são fechados e $A = X$ ou $A = \emptyset$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Se $X = A \cup A^c$ com A e A^c abertos, então $\partial A = \emptyset$ e $A = X$ ou $A = \emptyset$. Logo X é conexo.