Espaços Métricos
Topologias e Homeomorfismos
Aula 06

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

12 de Setembro de 2022

Segundo Semestre de 2022

Topologias

Definição

Se $X \neq \varnothing$, $\mathcal{T}(X) \subset 2^X$ será chamanda uma topologia em X se

(i) *X e $\varnothing$ estão em $\mathcal{T}(X)$,*

(ii) *A união qualquer de elementos de $\mathcal{T}(X)$ pertencer a $\mathcal{T}(X)$ e*

(iii) *A interseção finita de elementos de $\mathcal{T}(X)$ pertencer a $\mathcal{T}(X)$.*

Neste caso, os elementos de $\mathcal{T}(X)$ serão chamados abertos e o par $(X, \mathcal{T}(X))$ será chamado espaço topológico.

Comparação entre topologias

Observação

Em geral, há muitas topologias possíveis em um conjunto $X \neq \varnothing$.

(i) *A topologia com menos abertos é $\mathcal{T}_c(X) = \{X, \varnothing\}$, chamada topologia caótica.*

(ii) *A topologia com mais abertos é $\mathcal{T}_d(X) = 2^X$, chamada topologia discreta.*

Definição

Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto e $\mathcal{T}_i(X)$, $i = 1, 2$, duas topologias em X.

Diremos que $\mathcal{T}_1(X)$ é mais fina que $\mathcal{T}_2(X)$ se $\mathcal{T}_1(X) \supset \mathcal{T}_2(X)$.

Observação

Uma topologia $\mathcal{T}_1(X)$ é mais fina que outra topologia $\mathcal{T}_2(X)$ se $\mathcal{T}_1(X)$ tem mais abertos que $\mathcal{T}_2(X)$.

Seja (X, ρ) um espaço métrico e

$$\mathcal{T}_\rho(X) = \{O \subset X : O \text{ é aberto em } (X, \rho)\}.$$

Já vimos que $\mathcal{T}_\rho$ é uma topologia. Esta topologia será chamada topologia induzida pela métrica ρ.

Observação

(*i*) *A métrica do zero-um define a topologia discreta.*

(*ii*) *Se X tem mais que um elemento, $\mathcal{T}_c(X)$ não é métrica. Isto é, não existe uma métrica em X cujos abertos são apenas $\varnothing$ e X.*

Topologias e funções contínuas

Proposição

Sejam (X,ρ) (Y,σ) *espaços métricos e* $f : X \to Y$ *uma função.*

Defina em X *a topologia (exercício) induzida por* f

$$\mathcal{T}_f(X) = \{f^{-1}(O) : O \in \mathcal{T}_\sigma(Y)\}.$$

Então f *é contínua se, e somente se,* $\mathcal{T}_\rho(X)$ *é mais fina que* $\mathcal{T}_f(X)$*.*

Observação

(1) *Se* $(X, \mathcal{T}(X))$ *e* $(Y, \mathcal{T}(Y))$ *forem espaços topológicos e* $f : X \to Y$ *for uma função, diremos que* f *será contínua se, e somente se,* $f^{-1}(O_Y) \in \mathcal{T}(X)$*, para todo* $O_Y \in \mathcal{T}(Y)$*.*

(2) *Continuidade depende da quantidade de abertos no domínio e no contradomínio, isto é, dados* $(X, \mathcal{T}(X))$ *e* $(Y, \mathcal{T}(Y))$ *espaços topológicos, quando mais (menos) abertos tem* $\mathcal{T}(X)$ *(*$\mathcal{T}(Y)$*) mais funções contínuas* $f : X \to Y$ *existem.*

(3) *Se considerarmos* $(X, \mathcal{T}_d)$ *ou* $(Y, \mathcal{T}_c(Y))$ *todas as funções* $f : X \to Y$ *serão contínuas.*

Métricas topologicamente equivalentes

Definição

Duas métricas serão **topologicamente equivalentes** *se definem os mesmos abertos.*

Exemplo

(1) *Métricas equivalentes são topologicamente equivalentes.*

(2) *Se (X, ρ) é um espaço métrico e $\sigma : X \times X \to \mathbb{R}^+$ é dada por*

$$\sigma(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

então ρ e σ são topologicamente equivalentes.

Solução: (1) Sejam $X \neq \varnothing$ e $\rho, \sigma : X \times X \to \mathbb{R}^+$ métricas equivalentes em X. Então, existem constantes positivas c_σ, c_ρ tais que

$$\rho(x,y) \leqslant c_\sigma\, \sigma(x,y), \text{ e } \sigma(x,y) \leqslant c_\rho\, \rho(x,y).$$

Se $A \in \mathcal{T}_\rho(X)$ e $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $B^\rho_r(a) \subset A$. É claro que

$$B^\sigma_{\frac{r}{c_\sigma}}(a) \subset B^\rho_r(a) \subset A \ \text{ e } \ A \in \mathcal{T}_\sigma(X). \quad \text{Logo } \mathcal{T}_\rho(X) \subset \mathcal{T}_\sigma(X).$$

A outra inclusão é análoga.

(2) Basta ver que

$$\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} < r \Leftrightarrow \rho(x,y) < \frac{r}{1-r}, \ \ r \in (0,1),$$

isto é,

$$B^\rho_{\frac{r}{1-r}}(x) = B^\sigma_r(x), \qquad \text{para todo } r \in (0,1) \text{ e } x \in X. \ \square$$

Homeomorfismos

Definição

Sejam (X,ρ) (Y,σ) espaços métricos. Se $f : X \to Y$ for uma bijeção contínua e $f^{-1} : Y \to X$ for contínua, f será chamada de homeomorfismo. Neste caso, (X,ρ) e (Y,σ) serão homeomorfos.

Observação

(1) *Note que se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, então existe uma corresponência biunívoca entre os aberto de X e de Y.*

(2) *Pode ocorrer que $f : X \to Y$ seja contínua, bijetora e que $f^{-1} : Y \to X$ não seja contínua.*

(3) *Tomando em $\mathbb{R}$ a métrica discreta ρ_d e a métrica usual ρ a identidade $f(x) = x$, de $(\mathbb{R}, \rho)$ em $(\mathbb{R}, \rho_d)$, não será contínua. Basta ver que em $(\mathbb{R}, \rho_d)$ existem abertos que não são abertos em $(\mathbb{R}, \rho)$.*

Observação

(1) *Se* $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *e* $f : [0, 2\pi) \to S^1$ *for dada por* $f(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t)$, *então* f *será contínua, bijetora mas sua inversa será descontínua em* $(1,0)$. *Note que* $f|_{(0,2\pi)} : (0, 2pi) \to S^1 \backslash \{(1,0)\}$ *é um homeomorfismo.*

(2) *Neste último exemplo note que, se retirarmos um número positivo* p *do intervalo* $[0, \pi)$, *esta ação separa o domínio de* f *em duas partes. Ao retirar* $f(p)$ *de* S^1 *o conjunto obtido continua a ter apenas uma parte. Isto será usado para mostrar que a* S^1 *não é homeomorfa a um intervalo.*

Espaços Conexos

Definição

Um espaço métrico (X, ρ) será conexo se, e somente se, X não for união de dois subjonjuntos abertos disjuntos e não vazios de X.

Seja $A \subset X$ e ρ_A a métrica induzida em A ela métrica ρ de X. Se (A, ρ_A) for conexo, diremos que A será conexo.

Proposição

Seja (X, ρ) espaço métrico. São equivalentes:

(1) *X é conexo;*

(2) *X e $\varnothing$ são os únicos subconjuntos de X que são, ao mesmo tempo, abertos e fechados.*

(3) *Se $A \subset X$ tem fronteira vazia, então $A = X$ ou $A = \varnothing$.*

Prova:

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$. Se $A \subset X$ for, ao mesmo tempo, aberto e fechado então A^c será, ao mesmo tempo, aberto e fechado. Além disso $A \cup A^c = X$. Segue que $A = X$ ou $A = \varnothing$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$. Se $A \subset X$ e $\partial A = \varnothing$, A é aberto e A^c é aberto. Logo A e A^c também são fechados e $A = X$ ou $A = \varnothing$.

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$. Se $X = A \cup A^c$ com A e A^c abertos, então $\partial A = \varnothing$ e $A = X$ ou $A = \varnothing$. Logo X é conexo.