Espaços Métricos
Funções Contínuas
Aula 05

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

31 de Agosto de 2022

Segundo Semestre de 2022

Caracterização topológica

Proposição

Sejam (X, ρ), (Y, σ) espaços métricos.

Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se,

$f^{-1}(U)$ é aberto em (X, ρ) sempre que U é aberto em (Y, σ).

Prova: Se f é contínua,
U é um aberto de Y, $y \in f^{-1}(U)$ e $\epsilon > 0$ é tal que $B_\epsilon(f(y)) \subset U$ existe $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(B_\epsilon(f(y)) \supset B_\delta(y)$. Logo y é interior a $f^{-1}(U)$. Isto mostra que $f^{-1}(U)$ é aberto.

Por outro lado,
se $f^{-1}(U)$ é aberto em (X, ρ) sempre que U é aberto em (Y, σ), $x \in X$ e $\epsilon > 0$, temos que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ é aberto e contém x. Segue que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ e f é contínua em x. Logo f é contínua para todo $x \in X$. □

Caracterização por seqüências

Proposição

Sejam (X, ρ), (Y, σ) *espaços métricos.*

Uma função $f : X \to Y$ *é contínua em* $x \in X$ *se, e somente se,*

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ em } X \Longrightarrow f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \text{ em } Y.$$

Prova: Se f é contínua em $x \in X$ e

$\{x_n\}$ é uma seqüência em X com $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ em X, dado $\epsilon > 0$

- seja $\delta > 0$ tal que $\sigma(f(x), f(x')) < \epsilon$, para todo $x' \in B_\delta^X(x)$ e
- seja $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x, x_n) < \delta$ para todo $n \geqslant N_\delta$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, se $n \geqslant N_\delta$, $\sigma(f(x), f(x_n)) < \epsilon$. Isto mostra que

$f(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ em Y.

Se f não fosse contínua em x,

existiria um $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, $f(B_\delta^X(x)) \subsetneq B_\epsilon^Y(f(x))$.

Seja $x_n \in B_{\frac{1}{n}}^X(x)$ tal que $f(x_n) \notin B_\epsilon^Y(f(x))$. Segue que, se f não fosse contínua em x, existiria seqüência $\{x_n\}$ em X, $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ em X

e tal que $f(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(x)$ em Y. $\square$

A composta

Proposição (3)

Sejam (X,ρ), (Y,σ) e (Z,μ) *espaços métricos,*
$g : X \to Y$ *contínua em* $x \in X$ e $f : Y \to Z$ *contínua em* $g(x) \in Y$.
Então, a composta $f \circ g : X \to Z$, *de* f e g, *definida por*
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *é contínua em* x.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ seja

$\delta' > 0$ tal que $\sigma(y, g(x)) < \delta' \Rightarrow \mu(f(y), f(g(x))) < \epsilon$ e

$\delta > 0$ tal que $\rho(x', x) < \delta \Rightarrow \sigma(g(x'), g(x)) < \delta'$.

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\rho(x, x') < \delta \Rightarrow \mu(f(g(x')), f(g(x))) < \epsilon. \square$$

A restrição

Proposição

Sejam (X,ρ), (Y,σ) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Se f é contínua em $x \in M \subset X$, a restrição de f a M é contínua em x.

Prova: Como $f\big|_M : M \to Y$ é definida por $f\big|_M(x) = f(x)$, $\forall\ x \in M$, temos $f\big|_M = f \circ I_M$, onde $I_M : M \to X$ é dada por $I_M(x) = x$, $\forall\ x \in M$. Como I_M é uma imersão isométrica, portanto contínua, o resultado segue da proposição anterior. $\square$

Coordenadas e funções de várias variáveis

Sejam (Y_i, σ_i), $1 \le i \le N$, espaços métricos e considere o produto cartesiano $\Pi = \prod_{i=1}^{N} Y_i$ com a métrica, $\pi_p : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\pi_p(z, z') = \left(\sum_{i=1}^{N} (\sigma_i(y_i, y_i'))^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \text{ ou} \qquad (1)$$

$$\pi_\infty(z, z') = \max\{\sigma_i(y_i, y_i')) : 1 \le i \le N\},$$

para todo $z = (y_1, \cdots, y_N)$, $z' = (y_1', \cdots, y_N')$ em Π.

Projeções e coordenadas

Defina $P_i : \Pi \to Y_i$ por $P_i z = y_i$, $\forall\ z = (y_1, \cdots, y_N) \in \Pi$, $1 \leq i \leq N$.
A função P_i é chamada projeção na $i-$ésima coordenada, $1 \leq i \leq N$.

Agora, se (X, ρ) é um espaço métrico e $f : X \to \Pi$ é uma função, para cada $x \in X$, $f(x) \in \Pi$. Seja $f_i : X \to Y_i$ definida por $f_i = P_i \circ f$. Então, $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \in \Pi$. As funções f_i são chamadas coordenadas de f.

Proposição

Se (X, ρ) e (Y_i, σ_i), $1 \leq i \leq N$, são espaços métricos. Seja (Π, π_p) o espaço produto, $p \in [1, \infty]$. Então

(1) *As projeções coordenadas $P_i : \Pi \to Y_i$ são Lipschitz contínuas, com constante de Lipschitz igual a 1, $1 \leq i \leq N$.*

(2) *Uma função $f : X \to \Pi$ será contínua se, e somente se, $f_i = P_i \circ f$ for contínua, para todo $1 \leq i \leq N$.*

Prova:

(1) Se $z = (y_1, \cdots, y_N), z' = (y'_1, \cdots, y'_N) \in \Pi$

$$\sigma_i(P_i z, P_i z') = \sigma_i(y_i, y'_i) \leq \pi_p(z, z'),$$

para qualquer escolha de $p \in [1, \infty]$.

(2) $\Rightarrow$ Se f for contínua, em $x \in X$, e P_i for a projeção do item (1), então $f_i = P_i \circ f$ será contínua, em $x \in X$, pela Proposição 3, $1 \leq i \leq N$.

$\Leftarrow$ Se $f_i = P_i \circ f$ for contínua em $x \in X$, $1 \leq i \leq N$, mostremos que f será contínua, em $x \in X$. De fato, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_i > 0$ tal que

$$\rho(x, x') < \delta_i \Rightarrow \sigma_i(f_i(x), f_i(x')) < \frac{\epsilon}{N^{\frac{1}{p}}} \ (\epsilon \text{ se } p = \infty).$$

Para $\delta = \min\{\delta_i : 1 \leq i \leq N\}$, e $\rho(x, x') < \delta$ temos $\pi_\infty(f(x), f(x')) < \epsilon$ e, se $p \in [1, \infty)$,

$$\pi_p(f(x), f(x')) < \left(\sum_{i=1}^{N} (\sigma_i(f_i(x), f_i(x'))^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon. \ \square$$

Funções de várias variáveis

Como antes, sejam (Y_i, σ_i), $1 \leq i \leq N$, (X, ρ), espaços métricos e $\Pi = \prod_{i=1}^{N} Y_i$, com a métrica produto π_p, definida em (1), o seu produto cartesiano .

Uma função $f : \Pi \to X$ é vista como função de várias variáveis.

A continuidade de f no ponto $z = (y_1, \cdots, y_n)$ significa:
dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\pi_p(z, z') < \delta \Rightarrow \rho(f(z), f(z')) < \epsilon$.

Logo, se $\hat{z}_i = (y_1, \cdots, y_{i-1}, y_i', y_{i+1}, \cdots, y_N)$, defina $f_i : Y_i \to X$ por $f_i(y_i') = f(\hat{z}_i)$.

Então, vale o seguinte resultado:

Proposição

Se f é contínua em z, f_i é contínua em y_i, $1 \leq i \leq N$.

Prova: De fato, dado $\epsilon > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que $\sigma_i(y_i, y_i') = \pi_p(\hat{z}_i, z) < \delta$ $\Rightarrow \rho(f(z), f(\hat{z}_i)) < \epsilon$. $\square$

A recíproca é falsa, ou seja, existe função $f : \Pi \to Y$ tal que: cada $f_i : X_i \to Y$ é contínua, $1 \leq i \leq N$, e f não é contínua em algum ponto de Π.

Exercício

Mostre que a recíproca é falsa. O contra-exemplo típico é a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Neste caso $f_1(x) = f(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, e $f_2(y) = f(y,0)$, $y \in \mathbb{R}$, são identicamente nulas e portanto contínuas. Mas $f(x,x) = 1$, se $x \neq 0$, e $f(0,0) = 0$.

Exercício

Se, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y), & se\ y = 0 \quad ou \quad y \neq 0\ e\ \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q} \\ (0,0), & se\ y \neq 0\ e\ \dfrac{x}{y} \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) *Mostre que* f *só é contínua em* $(0,0)$.

(b) *Encontre uma função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *que não é contínua em nenhum ponto e tal que* f_1 *e* f_2, $f_1(x) = f(x,0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e $f_2(y) = f(0,y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$ *são contínuas.*