Espaços Métricos
Funções Contínuas

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Segundo Semestre de 2022

Funções Contínuas

Definição

Sejam (X,ρ), (Y,σ) são espaços métricos.
Uma função $f:X\to Y$ é contínua em $x\in X$ se, e somente se, dado $\epsilon>0$, existir $\delta=\delta(\epsilon,x)>0$ tal que $\rho(x',x)<\delta\Rightarrow\sigma(f(x'),f(x))<\epsilon$.

Em um espaço métrico (W,ρ_W), muitas vezes escreveremos $B_r^W(x)$ para denotar a bola de centro em x e raio r em W.

Dito de outra forma f é contínua em $x\in X$ se, e somente se, dado $\epsilon>0$ existir $\delta=\delta(\epsilon,x)>0$ tal que $f^{-1}(B_\epsilon^Y(f(x)))\supset B_\delta^X(x)$.

Diremos, simplesmente, que f é contínua quando f for contínua para todo $x\in X$ e uniformemente contínua se a escolha de δ depender somente de ϵ e não de $x\in X$.

Definição

Sejam (X,ρ), (Y,σ) *espaços métricos e* $f : X \to Y$ *uma função. Se, para algum* $\lambda > 0$,

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda\, \rho(x_1, x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in X,$$

diremos que f é Lipschitz contínua (ou lipschitziana) com constante de Lipschitz λ.

Diremos que f será localmente Lipschitz contínua (ou localmente lipschitziana) se, para cada $x \in X$, *existirem* $r_x > 0$ *e* $\lambda_x > 0$ *tais que*

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda_x\, \rho(x_1, x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in B^X_{r_x}(x).$$

Exercício

Sejam (X, ρ), (Y, σ) *espaços métricos e* $f : X \to Y$ *uma função. Mostre que*

(a) *Se* f *é localmente Lipschitz contínua, então* f *é contínua.*

(b) *Se* f *é Lipschitz contínua, então* f *é uniformemente contínua.*

Exercício

Seja (X, ρ) *um espaço métrico e* $E \subset X$*. Mostre que, a função* $\rho_E : X \to \mathbb{R}^+$ *definida por* $\rho_E(x) = \mathrm{dist}(x, E)$, $x \in X$ *é uniformemente contínua.*

Definição

Sejam (X, ρ), (Y, σ) *espaços métricos. Se* $f : X \to Y$ *for tal que* $\sigma(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$, *para todo* $x_1, x_2 \in X$, f *será chamada uma imersão isométrica de* X *em* Y. *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetora.*

Exemplo

Sejam (X,ρ), (Y,σ) espaços métricos.

1. *Toda imersão isométrica de X em Y é uniformemente contínua.*
2. *Se f for uma imersão isométrica de X em Y e $\tilde{Y} = f(X)$ com a métrica $\tilde{\sigma}$ induzida pela métrica de Y, então $f : X \to \tilde{Y}$ será uma isometria.*
3. *Se $f : X \to Y$ for injetiva e definirmos em $\tilde{Y} = f(X)$ a métrica $\sigma_f(y_1, y_2) = \rho(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$, para todo $y_1, y_2 \in \tilde{Y}$, então $f : X \to \tilde{Y}$ será uma isometria.*
4. *Se $M \subset X$ e $\rho_M : M \times M \to \mathbb{R}^+$ é a métrica induzida, $I_M : M \to X$ definida por $I_M(x) = x$ é uma imersão isométrica.*

Exemplo

Um espaço métrico (X,ρ) pode ser imerso isometricamente no espaço vetorial normado $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ das funções limitadas $f: X\to\mathbb{R}$, com a norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x\in X\}$.

Solução: Fixe $x_0\in X$ e tome $T: M\to\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ dada por:

$$(Tx)(x') = \rho(x,x') - \rho(x_0,x'), \quad \text{para todo } x'\in X.$$

Como, $(Tx)(x_0) = \rho(x,x_0)$, $|(Tx_1)(x_2) - (Tx_2)(x_2)| = \rho(x_1,x_2)$ e para todo $x'\in X$

$$(Tx)(x') = |\rho(x,x') - \rho(x_0,x')| \leqslant \rho(x,x_0),$$

$$|(Tx_1)(x') - (Tx_2)(x')| = |\rho(x_1,x') - \rho(x_2,x')| \leqslant \rho(x_1,x_2)$$

segue que $\|Tx\|_\infty = \rho(x,x_0)$ e $\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty = \rho(x_1,x_2)$. $\square$

Proposição

Sejam (X, ρ), (Y, σ) espaços métricos.

Uma função $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se,

$f^{-1}(U)$ é aberto em (X, ρ) sempre que U é aberto em (Y, σ).

Prova: Se f é contínua,
U é um aberto de Y, $y \in f^{-1}(U)$ e $\epsilon > 0$ é tal que $B_\epsilon(f(y)) \subset U$ existe $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(B_\epsilon(f(y)) \supset B_\delta(y)$. Logo y é interior a $f^{-1}(U)$. Isto mostra que $f^{-1}(U)$ é aberto.

Por outro lado,
se $f^{-1}(U)$ é aberto em (X, ρ) sempre que U é aberto em (Y, σ), $x \in X$ e $\epsilon > 0$, temos que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ é aberto e contém x. Segue que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ e f é contínua em x. Logo f é contínua para todo $x \in X$. $\square$

Proposição

Sejam (X, ρ), (Y, σ) espaços métricos.

Uma função $f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se,

$$x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ em } X \Longrightarrow f(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \text{ em } Y.$$

Prova: Se f é contínua em $x \in X$ e $\{x_n\}$ é uma seqüência em X com $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ em X, dado $\epsilon > 0$

- seja $\delta > 0$ tal que $\sigma(f(x), f(x')) < \epsilon$, para todo $x' \in B_\delta^X(x)$ e
- seja $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x, x_n) < \delta$ para todo $n \geqslant N_\delta$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, se $n \geqslant N_\delta$, $\sigma(f(x), f(x_n)) < \epsilon$. Isto mostra que $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ em Y.

Se f não é contínua em x, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, $f(B_\delta^X(x)) \subsetneq B_\epsilon^Y(f(x))$. Seja $x_n \in B_{\frac{1}{n}}^X(x)$ tal que $f(x_n) \notin B_\epsilon^Y(f(x))$. Segue que, se f não é contínua em x, existe seqüência $\{x_n\}$ em X, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ em X e tal que $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(x)$ em Y. $\square$

Proposição

Sejam (X, ρ_x), (Y, ρ_Y) *e* (Z, ρ_Z) *espaços métricos,*
$g : X \to Y$ *contínua em* $x \in X$ *e* $f : Y \to Z$ *contínua em* $g(x) \in Y$.
Então, a composta $f \circ g : X \to Z$, *de* f *e* g, *definida por*
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *é contínua em* x.

Prova: Dado $\epsilon > 0$ seja

$\delta' > 0$ tal que $\rho_Y(y, g(x)) < \delta' \Rightarrow \rho_Z(f(y), f(g(x))) < \epsilon$ e

$\delta > 0$ tal que $\rho_X(x', x) < \delta \Rightarrow \rho_Y(g(x'), g(x)) < \delta'$.

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Z(f(g(x')), f(g(x))) < \epsilon. \square$$

Proposição

Sejam (X, ρ_x), (Y, ρ_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Se f é contínua em $x \in M \subset X$, a restrição de f a M é contínua em x.

Prova: Como $f\big|_M : M \to Y$ é definida por $f\big|_M(x) = f(x)$, $\forall\ x \in M$, temos $f\big|_M = f \circ I_M$, onde $I_M : M \to X$ é dada por $I_M(x) = x$, $\forall\ x \in M$. Como I_M é uma imersão isométrica, portanto contínua, o resultado segue da proposição anterior. $\square$