Espaços Métricos
Distância e Distância de Hausdorff

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

Segundo Semestre de 2022

Distância entre conjuntos

Definição

Distância entre conjuntos Seja (X, ρ) *um espaço métrico.*

(a) *Seja* $x \in X$ *e* $E \subset X$, *a* **distância** *de* x *a* E *é definida por*

$$\operatorname{dist}(x, E) = \inf\{\rho(x, e) : e \in E\}.$$

(b) *Sejam* $E, F \subset X$, *a* **distância** *entre* E *e* F *é definida por*

$$\operatorname{dist}(E, F) = \inf\{\operatorname{dist}(e, F) : e \in E\},$$

Proposição

Seja (X, ρ) *um espaço métrico e* $E \subset X$. *Então*

$$|\mathrm{dist}(x, E) - \mathrm{dist}(y, E)| \leqslant \rho(x, y), \qquad \textit{para todo } x, y \in X.$$

Prova: Note que,

$$\mathrm{dist}(x, E) \leqslant \rho(x, e) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, e), \quad \forall\, e \in E.$$

Tomando o ínfimo, $\mathrm{dist}(x, E) \leqslant \rho(x, y) + \mathrm{dist}(y, E)$. De maneira idêntica obtemos também que $\mathrm{dist}(y, E) \leqslant \rho(x, y) + \mathrm{dist}(x, E)$. Logo

$$-\rho(x, y) \leqslant \mathrm{dist}(x, E) - \mathrm{dist}(y, E) \leqslant \rho(x, y)$$

e o resultado segue. $\square$

Corolário

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Então

$$|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y), \quad \forall\, x, y, z \in X.$$

Definição (Vizinhança de um conjunto)

Seja (X,ρ) um espaço métrico. Dado $\epsilon > 0$, uma ϵ-vizinhança aberta de $\varnothing \neq E \subset X$ é o conjunto $\mathcal{O}_\epsilon(E)$ definido por

$$\mathcal{O}_\epsilon(E) := \{x \in X : \mathrm{dist}(x,E) < \epsilon\}.$$

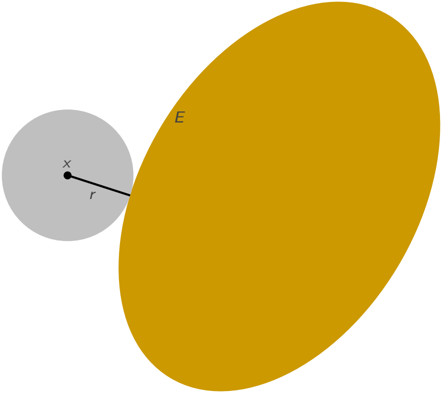
uma ϵ-vizinhança fechada de $E \subset X$ é o conjunto $\bar{\mathcal{O}}_\epsilon(E)$ definido por

$$\bar{\mathcal{O}}_\epsilon(E) := \{x \in X : \mathrm{dist}(x,E) \leqslant \epsilon\}.$$

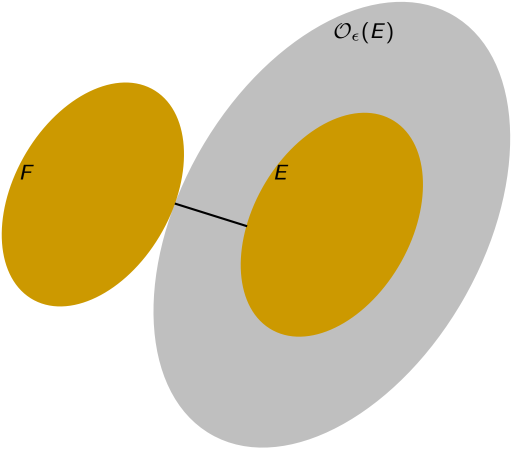
Exercício

Se (X,ρ) é um espaço métrico e $\varnothing \neq E \subset X$, mostre que $\bar{\mathcal{O}}_\epsilon(E)$ é fechado e que $\mathcal{O}_\epsilon(E) = \bigcup_{e\in E} B_\epsilon(e)$.

Note que, se $r = \mathrm{dist}(x, E)$, é raio da maior bola aberta centrada em x que não intersepta E.



A distância $\operatorname{dist}(E, F)$ entre dois conjuntos E e F é o raio da maior vizinhança aberta de E que não intersepta F. Note que $\operatorname{dist}(E, F) = \operatorname{dist}(F, E)$ (exercício).



Distância de Hausdorff

Definição (Distância de Hausdorff)

Seja (X, ρ) *um espaço métrico.*

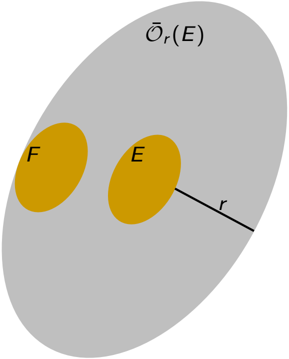
(a) *Sejam* $E, F \subset X$, *a* **semi-distância de Hausdorf** *entre* E *e* F *é definida por*

$$\delta_H(E,F) = \sup\{\mathrm{dist}(e,F) : e \in E\}$$

(b) *Sejam* $E, F \subset X$, *a* **distância de Hausdorf** *entre* E *e* F *é definida por*

$$\mathrm{dist}_H(E,F) = \max\{\delta_H(E,F), \delta_H(F,E)\}$$

A semi-distância de Hausdorff $\delta_H(F, E)$ entre dois conjuntos F e E é o raio da menor vizinhança fechada de E que contém F. Note que, em geral, $\delta_H(E, F) \neq \delta_H(F, E)$ (exercício).



Observe que, se $\delta_H(F, E)$ é pequeno, F está 'quase dentro de E'.

Exercício

Seja (X, ρ) *um espaço métrico. Mostre que, se* $\delta_H(F, E) = 0$*, então* $F \subset E^-$.

Exemplo

Seja (X, ρ) *um espaço métrico. Considere o conjunto*

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ é fechado e limitado}\}.$$

Defina $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ *por* $\rho_{\mathcal{F}}(F, G) = \mathrm{dist}_H(F, G)$. *Então,* $(\mathcal{F}, \rho_{\mathcal{F}})$ *é um espaço métrico.*

Solução: Sejam E, F e G subconjuntos fechados de X. Note que

(i) $\rho_{\mathcal{F}}(E, F) = \mathrm{dist}_H(E, F) = \delta_H(E, F) + \delta_H(F, E) = 0$ e, do exercício anterior, $E \subset F$ e $F \subset G$, logo $E = F$.

(ii) É claro da definição que $\rho_{\mathcal{F}}(E, F) = \rho_{\mathcal{F}}(F, E)$.

(iii) Resta mostrar que

$$\rho_{\mathcal{F}}(E, G) \leqslant \rho_{\mathcal{F}}(E, F) + \rho_{\mathcal{F}}(F, G)$$

Note que, se $e \in E$, $f \in F$ e $g \in G$,

$$\rho(e,g) \leqslant \rho(e,f) + \rho(f,g).$$

Tomando o ínfimo para $g \in G$, $\mathrm{dist}(e,G) \leqslant \rho(e,f) + \mathrm{dist}(f,G)$.
Como $\mathrm{dist}(f,G) \leqslant \delta_H(F,G)$, segue que

$$\mathrm{dist}(e,G) \leqslant \rho(e,f) + \delta_H(F,G).$$

Como o lado esquerdo não depende de f, tomando o ínfimo para $f \in F$ no lado direito resulta $\mathrm{dist}(e,G) \leqslant \mathrm{dist}(e,F) + \delta_H(F,G)$.
Agora, tomando o supremo para $e \in E$,

$$\delta_H(E,G) \leqslant \delta_H(E,F) + \delta_H(F,G) \leqslant \mathrm{dist}_H(E,F) + \mathrm{dist}_H(F,G).$$

Do mesmo modo $\delta_H(G,E) \leqslant \mathrm{dist}_H(E,F) + \mathrm{dist}_H(F,G)$ e

$$\mathrm{dist}_H(E,G) \leqslant \mathrm{dist}_H(E,F) + \mathrm{dist}_H(F,G). \quad \square$$

Definição

Uma pseudo-métrica ou semi-distância em um conjunto não vazio X *é uma função* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *tal que* (i) $\rho(x,x) = 0$, (ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ *e* (iii) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$, *para todo* $x, y, z \in X$.

Exercício

Seja (X, ρ) *um espaço métrico limitado. Considere o conjunto*

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : F \text{ é fechado}\}.$$

Defina $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ *por* $\rho_{\mathcal{F}}(F, G) = \delta_H(F, G)$. *Então,* $\rho_{\mathcal{F}}$ *satisfaz* (i) *e* (iii) *mas não satisfaz* (ii) *da defincão acima. Mostre ainda que,* $\rho_{2^X} : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}^+$ *definida por* $\rho_{2^X}(A, B) = \mathrm{dist}_H(A, B)$, $A, B \subset X$ *é uma pseudo-métrica.*