# Espaços Métricos
# Funções Contínuas
# Aula 04

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

29 de Agosto de 2022

**Segundo Semestre de 2022**

# Funções Contínuas

## Definição

*Sejam $(X,\rho)$, $(Y,\sigma)$ são espaços métricos.*
*Uma função $f: X \to Y$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ tal que $\rho(x', x) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x'), f(x)) < \epsilon$.*

Em um espaço métrico $(W, \rho_W)$, muitas vezes escreveremos $B_r^W(x)$ para denotar a bola de centro em $x$ e raio $r$ em $W$.

Dito de outra forma $f$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ tal que $f^{-1}(B_\epsilon^Y(f(x))) \supset B_\delta^X(x)$.

Diremos, simplesmente, que $f$ é contínua quando $f$ for contínua para todo $x \in X$ e uniformemente contínua se a escolha de $\delta$ depender somente de $\epsilon$ e não de $x \in X$.

## Definição

*Sejam* $(X,\rho)$, $(Y,\sigma)$ *espaços métricos e* $f : X \to Y$ *uma função. Se, para algum* $\lambda > 0$,

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda\, \rho(x_1, x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in X,$$

*diremos que* *f é Lipschitz contínua (ou lipschitziana)* *com constante de Lipschitz* $\lambda$.

*Diremos que* *f será localmente Lipschitz contínua* *(ou localmente lipschitziana) se, para cada* $x \in X$, *existirem* $r_x > 0$ *e* $\lambda_x > 0$ *tais que*

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda_x\, \rho(x_1, x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in B^X_{r_x}(x).$$

## Exercício

*Sejam $(X,\rho)$, $(Y,\sigma)$ espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função. Mostre que*

(a) *Se $f$ é localmente Lipschitz contínua, então $f$ é contínua.*

(b) *Se $f$ é Lipschitz contínua, então $f$ é uniformemente contínua.*

## Exercício

*Seja $(X,\rho)$ um espaço métrico e $E \subset X$. Mostre que, a função $\rho_E : X \to \mathbb{R}^+$ definida por $\rho_E(x) = \mathrm{dist}(x, E)$, $x \in X$ é uniformemente contínua.*

## Definição

*Sejam* $(X,\rho)$, $(Y,\sigma)$ *espaços métricos. Se* $f : X \to Y$ *for tal que* $\sigma(f(x_1), f(x_2)) = \rho(x_1, x_2)$, *para todo* $x_1, x_2 \in X$, $f$ *será chamada uma imersão isométrica de* $X$ *em* $Y$. *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetora.*

## Exemplo

*Sejam $(X,\rho)$, $(Y,\sigma)$ espaços métricos.*

1. *Toda imersão isométrica de $X$ em $Y$ é uniformemente contínua.*
2. *Se $f$ for uma imersão isométrica de $X$ em $Y$ e $\tilde{Y} = f(X)$ com a métrica $\tilde{\sigma}$ induzida pela métrica de $Y$, então $f : X \to \tilde{Y}$ será uma isometria.*
3. *Se $f : X \to Y$ for injetiva e definirmos em $\tilde{Y} = f(X)$ a métrica $\sigma_f(y_1, y_2) = \rho(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$, para todo $y_1, y_2 \in \tilde{Y}$, então $f : X \to \tilde{Y}$ será uma isometria.*
4. *Se $M \subset X$ e $\rho_M : M \times M \to \mathbb{R}^+$ é a métrica induzida, $I_M : M \to X$ definida por $I_M(x) = x$ é uma imersão isométrica.*

## Exemplo

*Um espaço métrico $(X, \rho)$ pode ser imerso isometricamente no espaço vetorial normado $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ das funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$, com a norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.*

**Solução:** Fixe $x_0 \in X$ e tome $T : X \to \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ dada por:

$$(Tx)(x') = \rho(x, x') - \rho(x_0, x'), \quad \text{para todo } x' \in X.$$

Como, $(Tx)(x_0) = \rho(x, x_0)$, $|(Tx_1)(x_2) - (Tx_2)(x_2)| = \rho(x_1, x_2)$ e para todo $x' \in X$

$$|(Tx)(x')| = |\rho(x, x') - \rho(x_0, x')| \leqslant \rho(x, x_0),$$

$$|(Tx_1)(x') - (Tx_2)(x')| = |\rho(x_1, x') - \rho(x_2, x')| \leqslant \rho(x_1, x_2)$$

segue que $\|Tx\|_\infty = \rho(x, x_0)$ e $\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty = \rho(x_1, x_2)$. $\square$